

FENOMENI DI LINEARIZZAZIONE

Esempio 1 $F_\varepsilon(u) = \int_0^l [\sin^2(\dot{u}^2) + \varepsilon \sin u] dx \quad \varepsilon > 0$

$$\min \{ F_\varepsilon(u) : u \in C^1([0, l]), u(0) = u(l) = 0 \}$$

→ Facile: ad $\varepsilon > 0$ fisso esiste il minimo ed è < 0
(metodo diretto classico + regolarità via bootstrap)

→ Cosa succede quando $\varepsilon \rightarrow 0$?

Idea: pongo $u(x) = \varepsilon v(x)$ e scrivo tutto in termini di $v(x)$

$$\begin{aligned} & \int_0^l [\sin^2(\varepsilon^2 \dot{v}^2) + \varepsilon \sin(\varepsilon v)] dx \\ &= \varepsilon^2 \int_0^l \frac{\sin^2(\varepsilon^2 \dot{v}^2)}{\varepsilon^2} + \frac{\sin(\varepsilon v)}{\varepsilon} dx \\ & \quad G_\varepsilon(v) \end{aligned}$$

Ragionevolmente $G_\varepsilon(v) \xrightarrow{T} G_0(v) = \int_0^l (\dot{v}^2 + v) dx$

Se questo fosse vero, e in aggiunta ci fosse equi-coercività, avremmo che

$$\min \{ F_\varepsilon(u) : \dots \} \sim \varepsilon^2 \min \{ G_0(v) : v(0) = v(l) = 0 \}$$

e se $u_\varepsilon \in \arg\min \{ F_\varepsilon(u) : u \dots \}$, allora

$$u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon v_0(x), \text{ dove } v_0 \in \arg\min \{ G_0(v) : \dots \}$$

Perché $G_\varepsilon(v) \xrightarrow{T} G_0(v)$? (In C^0 , L^2 o L^1)

LIMINF Data $v_\varepsilon \rightarrow v$, devo mostrare che

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \geq G_0(v)$$

Se il liminf è $+\infty$, allora è gratis. Altrimenti a meno di s.succ. suppongo $G_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq M_1$.

Da questo ottengo

$$\|\dot{v}_\varepsilon\|_{L^2} \leq M_2$$

$$\int_0^l \dot{v}_\varepsilon^2 \leq \int_0^l \frac{\sup(\varepsilon^2 \dot{v}_\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} dx$$

$\uparrow$
 $\sup x \geq x \text{ per } x \geq 0$

A meno di s.succ. ancora ottengo che

$$\begin{array}{ll} v_\varepsilon \rightarrow v & \text{unif (A.A.)} \\ \dot{v}_\varepsilon \rightarrow \dot{v} & \text{debole } L^2 \end{array}$$

A quel punto passo al limite nei 2 termini

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^l \frac{\sup(\varepsilon^2 \dot{v}_\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} dx \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^l \dot{v}_\varepsilon^2 \geq \int_0^l \dot{v}^2$$

$\uparrow$ disug. sopra $\uparrow$ NORMA SCI

Per l'altro termine basta osservare che

$$\frac{\sup(\varepsilon v_\varepsilon(x))}{\varepsilon} \rightarrow v(x) \quad \text{uniformemente}$$

se $v_\varepsilon(x) \rightarrow v(x)$ unif.

LIMSUP Per ogni $v \in L^2, C^0, L^1$ devo trovare $v_\varepsilon \rightarrow v$ t.c.

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} G_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq G_0(v)$$

Basta in realtà farlo quando $G_0(v) < +\infty$, cioè $v \in H^1$.

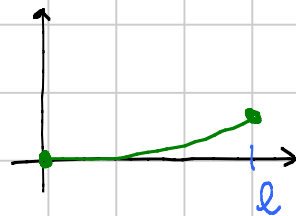
Ancora meglio, basta farlo per $v \in C^1$ (denso in energia)

Se v e $\dot{v}$ sono continue, posso usare la recovery costante $v_\varepsilon \equiv v$.

Esempio 2

$$F(u) = \int_0^l [\sin^2(u') + \sin^2(u)] dx$$

$$\min \{ F(u) : u(0) = 0, u(l) = \varepsilon \}$$



Come prima $u = \varepsilon v \rightsquigarrow \underline{v(0) = 0, v(l) = 1}$ nuove BC

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^l [\sin^2(\varepsilon^2 v'^2) + \sin^2(\varepsilon v)] dx \\ &= \varepsilon^2 \underbrace{\int_0^l \left[\frac{\sin^2(\varepsilon^2 v'^2)}{\varepsilon^2} + \frac{\sin^2(\varepsilon v)}{\varepsilon^2} \right] dx}_{G_\varepsilon(v)} \end{aligned}$$

$$\text{Ora } G_\varepsilon(v) \rightarrow G_0(v) = \int_0^l [v'^2 + v^2] dx \text{ con BC } \begin{matrix} v(0)=0 \\ v(l)=1 \end{matrix}$$

e quindi

$$\min \{ F(u) : u(0) = 0, u(l) = \varepsilon \} \sim \varepsilon^2 \min \{ G_0(v) : \dots \}$$

e se $u_\varepsilon(x)$ è p.to di min. del pbm. iniziale, allora

$$u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon v_0(x), \text{ dove } v_0(x) \text{ è il p.to di minimo di } G_0(v).$$

La Gamma-convergenza si dimostra come prima
— o — o —

Esempio 3

$$F(u) = \int_0^l \sqrt{1 + u'^4} + \varepsilon \cos(u) \quad \begin{matrix} u(0) = 0 \\ u(l) = 0 \end{matrix}$$

Esistenza ad ε fisso banale dal metodo diretto.

La sol. non è quella nulla perché $\sqrt{1+u^4} \sim 1 + \frac{1}{2} u^4$
 $\cos u = 1 - \frac{1}{2} u^2$

quindi per confronto di ordini di infinitesimo ...

Pongo $u(x) = \varepsilon^\alpha v(x)$ e cerco α in modo da avere compensazione

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_0^l \sqrt{1 + \varepsilon^{4\alpha} \dot{v}^4} + \varepsilon \cos(\varepsilon^\alpha v) \\ &= \int_0^l \sqrt{1 + \varepsilon^{4\alpha} \dot{v}^4} - 1 + \varepsilon (\cos(\varepsilon^\alpha v) - 1) \quad \boxed{+ \varepsilon + 1} \\ &\quad \sim \varepsilon^{4\alpha} \quad \varepsilon^{1+2\alpha} \end{aligned}$$

non cade su chi è il minimo

quindi $4\alpha = 1+2\alpha$, cioè $\alpha = \frac{1}{2}$

Ora pongo

$$G_\varepsilon(v) = \int_0^l \left(\frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \dot{v}^4} - 1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{\cos(\sqrt{\varepsilon} v) - 1}{\varepsilon} \right) \right) dx$$

Dico che

$$G_\varepsilon(v) \xrightarrow{\Gamma} \frac{1}{2} \int_0^l (\dot{v}^4 - v^2) \quad \dots$$

Nella dimostrazione l'unico problema è sulla parte di derivata. Bisogna congelare il coefficiente.

Dico che

$$\frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 x^4} - 1}{\varepsilon^2} \geq \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2 x^4} - 1}{\varepsilon_0^2} \quad \text{per ogni } \varepsilon < \varepsilon_0$$

$$\frac{\cancel{\varepsilon^2} x^4}{\cancel{\varepsilon^2} (\sqrt{1 + \varepsilon^2 x^4} + 1)} \geq \frac{\cancel{\varepsilon_0^2} x^4}{\cancel{\varepsilon_0^2} (\sqrt{1 + \varepsilon_0^2 x^4} + 1)}$$

Quando $\dot{v}_\varepsilon \rightarrow \dot{v}$ (siamo nella parte LIMINF della Gamma - convergenza)

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^L \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \dot{v}_\varepsilon^4} - 1}{\varepsilon^2} \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^L \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2 \dot{v}_\varepsilon^4} - 1}{\varepsilon_0^2} dx$$

$$\geq \int_0^L \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2 \dot{v}^4} - 1}{\varepsilon_0^2} dx$$

↑
convessità integranda

Ora il sup wrt ε_0 del RHS è proprio $\int_0^L \frac{1}{2} \dot{v}^4 dx$ (Beppo Levi)

— 0 — 0 —

Posso controllare $\int v^2$ conoscendo $\int \dot{v}^4$ e BC?

$$|v(x) - v(0)| \leq \int_0^x \underbrace{|\dot{v}(s)|}_{L^4} \cdot \underbrace{1}_{L^{4/3}} ds \leq \|\dot{v}\|_{L^4} \cdot \|1\|_{L^{4/3}}$$

$$\leq \left[\int \dot{v}^4 \right]^{1/4} \cdot |x|^{3/4}$$

$$\leq L^{3/4} \left[\int \dot{v}^4 \right]^{1/4}$$

Quindi $\int |v|^2 \leq \text{cost} \cdot (\|\dot{v}\|_{L^4})^{1/2}$

Quindi $G_0(v)$ ammette minimo.