

OBSTACLE PROBLEMS

POINT-TO-CURVE PROBLEMS

TRANSVERSALITY

$$\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 + f(x)u \, dx : u \in C^1, u(0) = u(1) = 1, \begin{matrix} u(x) \geq 0 \\ \forall x \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

In generale posso pensare ostacoli del tipo

$$\varphi_1(x) \leq u(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 + f(x)u \, dx : u \in C^1, u(0) = u(1) = 1, \begin{matrix} u'(x) \geq -1 \\ \forall x \in [0,1] \end{matrix} \right\}$$

Ostacolo
sulla funzione

ostacolo sulla
derivata

Ostacolo sulla funzione

→ il metodo diretto si applica alla grande. Tutto funziona come sempre e il vincolo passa al limite, anche se ci fossero φ_1 e φ_2 perché è stabile per conv. unif.
⇒ esiste sol. debole.

Ostacolo sulla derivata

→ metodo diretto ok. Siamo a $u_n \rightarrow u_\infty$ unif
 $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty$ deb. L^2

Domanda: $\dot{u}_\infty$ rispetta il vincolo $\dot{u}_\infty(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Sì! Trucco dell'integrale.

Prendo ψ convessa, regolare quanto voglio e nulla $\psi(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.



Ora $\int_0^1 \psi(u_m(x)) dx = 0$ per ogni $m \in \mathbb{N}$

Inoltre essendo ψ convessa almeno

$$0 \leq \int_0^1 \psi(u_\infty) dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \psi(u_m) = 0$$

$\uparrow$ $\psi \geq 0$ sempre $\uparrow$ SCI

Questo mostra che $u_\infty(x) \leq -1$ solo in un insieme di misura nulla.

Alternativa Scontrare con u_m l'indicatrice dell'insieme dove $u_\infty(x) < -1$.

— 0 — 0 —

Approssimazione dell'ostacolo per Gamma-convergenza

$$F_m(u) = \int_0^1 (u^2 + \gamma_0 u + e^{-mu}) dx$$

$\uparrow$ penalizza essere negativi

Si verifica facilmente che $F_m(u) \xrightarrow{T} F(u)$ (con $+\infty$ se $u(x) < 0$ da qualche parte)
e che gli $F_m(u)$ sono equicocivi

Per l'ostacolo sulla derivata

$$F_u(u) = \int_0^1 (u^2 + e^{-m(u+1)} + \gamma_0 u) dx$$

anche in questo caso si ha Gamma-convergenza

— 0 — 0 —

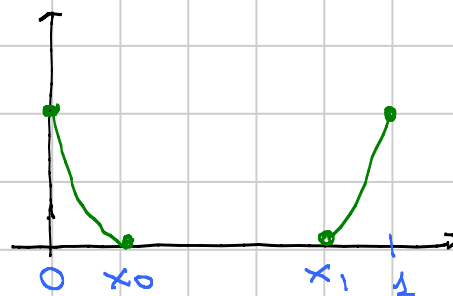
Come sono fatti i minimi?

Ostacolo sulla funzione

$$\int_0^1 \dot{u}^2 + 70u \, dx \quad u \geq 0 \quad u(0) = u(1) = 1$$

Con ragionamenti elementari si vede che non può staccarsi in mezzo.

Come trovo x_0 ?

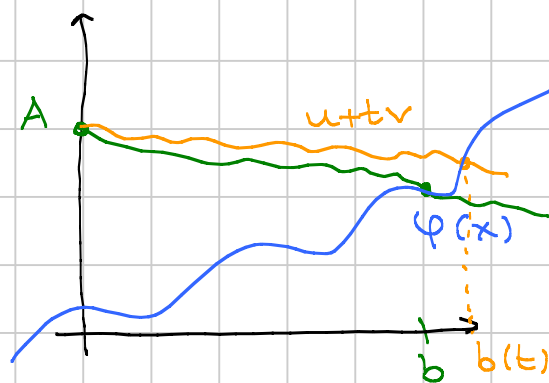


POINT-TO-CURVE PROBLEMS

$$F(u, b) = \int_0^b \psi(x, u, \dot{u}) \, dx$$

Voglio fare

$$\min \{ F(u, b) : u(0) = A, u(b) = \varphi(b) \}$$



Anche b è incognito.

Facile: u deve risolvere Eulero su $[0, b]$: $(\psi_p)' = \psi_s$

Voglio trovare la BC in b . Sia u una sol. di Eulero, definita anche dopo b . Prendo una $v \in C^\infty$ nulla in a , ma non nec. in b , e considero $u + tv$.

Domanda: $u + tv$ incontra φ ? Dove?

Considero

$$\phi(x, t) = u(x) + t v(x) - \varphi(x)$$

$$\phi(b, 0) = 0$$

$$\phi_x(x, t) = \dot{u}(x) + t \dot{v}(x) - \dot{\varphi}(x)$$

$$\phi_x(b, 0) = \dot{u}(b) - \dot{\varphi}(b)$$

Quindi, se $\Phi_x(b, 0) = \dot{u}(b) - \dot{\varphi}(b) \neq 0$ posso esplicitare e trovare $b(t)$ t.c.

$$\Phi(b(t), t) = 0$$

Inoltre

$$\dot{b}(0) = - \frac{\Phi_t(b, 0)}{\Phi_x(b, 0)} = - \frac{v(b)}{\dot{u}(b) - \dot{\varphi}(b)}$$

Ora posso

$$\varphi(t) = \int_0^{b(t)} \psi(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) dx$$

e impongo $\varphi'(0) = 0$. Ora

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \int_0^{b(t)} \psi_s(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) v + \psi_p(\dots) \dot{v} \\ &\quad + \psi(b(t), \dots) \dot{b}(t) \end{aligned}$$

Metto $t=0$:

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(0) &= \int_0^b (\psi_s v + \psi_p \dot{v}) dx + \psi(b, u(b), \dot{u}(b)) \dot{b}(0) \\ &= [\psi_p v]_0^b - \psi(b, u(b), \dot{u}(b)) \frac{v(b)}{\dot{u}(b) - \dot{\varphi}(b)} \\ &= \left[\psi_p(b, u(b), \dot{u}(b)) - \frac{\psi(\dots)}{\dot{u}(b) - \dot{\varphi}(b)} \right] v(b) \end{aligned}$$

Moltiplicando ottengo

$$\psi_p(b, u(b), \dot{u}(b)) (\dot{u}(b) - \dot{\varphi}(b)) = \psi(b, u(b), \dot{u}(b))$$

Oss. La formula vale anche se $\dot{u}(b) = \dot{\varphi}(b)$. In quel caso basta considerare la curva che fa $u(x)$ e dopo b prosegue lungo $\varphi(x)$.

Oss. Portato tutto al LHS ricorda l'eccesso di Weierstrass.

Tornando al pbm. con ostacolo sulla funzione, in x_0 si dovrà avere

$\psi_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) (\dot{u}(x_0) - 0) = \psi(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0))$
 che in questo caso ci dice che $\dot{u}(x_0) = 0$, quindi si attacca C^1 .

Caso più generale di ostacolo $u(x) \geq \varphi(x)$

Allo stesso modo trovo la condizione

$$\psi_p(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) (\dot{u}(x_0) - \dot{\varphi}(x_0)) = \psi(x_0, u(x_0), \dot{u}(x_0)) - \psi(x_0, u(x_0), \dot{\varphi}(x_0))$$

ora è d'eccezione!

Oss. Se ψ è strettamente convessa, l'unico modo di avere uguaglianza è attaccarsi C^1 cioè con $\dot{u}(x_0) = \dot{\varphi}(x_0)$.

E con l'ostacolo sulla derivata?

Se sapessi che la u minimizzante è convessa, la derivata -1 è all'inizio.



è come se fosse un ostacolo sulla funzione

Sui problemi approx la sol. è convessa (scrivo Eulero e osservo che $\ddot{u} \geq 0$).

Le solut. dei pbm. approx convergono unif. e il limite uniforme di convesse è convessa.