

GEODETICHE Trovare la curva più corta tra due punti dati

Caso piano $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ $\gamma(a) = A \in \mathbb{R}^2$
 $\gamma(b) = B \in \mathbb{R}^2$

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} dt}_{F(u,v)} : (u(a), v(a)) = A, (u(b), v(b)) = B \right\}$$

Problema grosso: l'integranda ha crescita lineare in $\dot{u}$ e $\dot{v}$

$$\psi(t, s_1, s_2, p_1, p_2) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

Da subito c'è NON unicità: qualunque parametr. del segmento AB risolve il problema

Eq. Eulero $(\psi_{p_1})' = \psi_{s_1}$ $\left(\frac{\dot{u}}{\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}} \right)' = 0$ $(\psi_{p_2})' = \psi_{s_2}$ $\left(\frac{\dot{v}}{\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}} \right)' = 0$

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}} = c_1 \quad \frac{\dot{v}}{\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2}} = c_2 \quad \text{Dopo un minimo di discussione si può dividere ed ottenere}$$

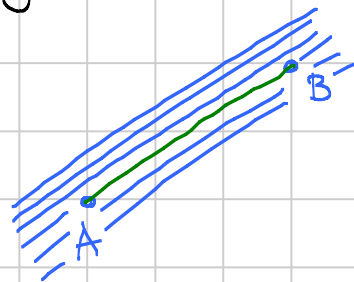
$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \text{costante} \leadsto \dot{u} = c \dot{v} \leadsto \text{segmento.}$$

Calibriamo: voglio trovare $\hat{\psi}(\dots)$
 tale che

$$\psi \geq \hat{\psi} \quad \text{sempre}$$

$$\psi = \hat{\psi} \quad \text{sulle curve della}$$

famiglia (cioè tutte le rette)



Sia (α, β) il vettore nella direzione di AB, cioè $\frac{B-A}{\|B-A\|}$

$$\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} \geq \alpha \dot{u} + \beta \dot{v} \quad (\text{vale} \Leftrightarrow (\dot{u}, \dot{v}) \text{ è multiplo di } (\alpha, \beta))$$

↑
c.s.

Per ogni curva che unisce A e B

$$A = (A_1, A_2) \quad B = (B_1, B_2)$$

$$\int_a^b \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} dt \geq \alpha \int_a^b \dot{u} dt + \beta \int_a^b \dot{v} dt$$

$$= \alpha (B_1 - A_1) + \beta (B_2 - A_2) \quad \alpha = \dots \quad \beta = \dots$$

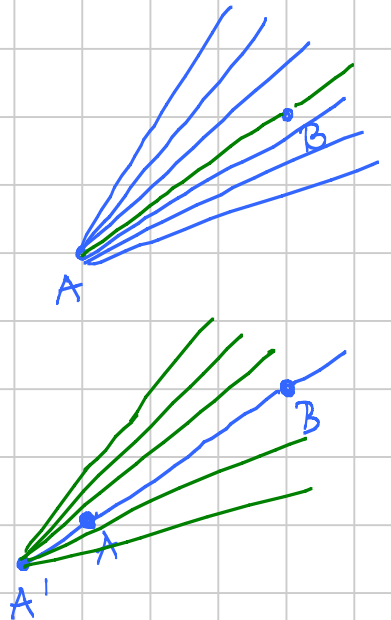
$$= \|B - A\| = \text{lunghezza segmento}$$

Altra calibrazione wlog $A = \text{origine}$

Uso come campo le soluzioni per A.

$$\sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} \geq \frac{\dot{u}u}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{\dot{v}v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

↑
c.s. con uguaglianza $\Leftrightarrow$
 $(\dot{u}, \dot{v})$ è parallelo di u, v



Faccio il conto e vedo che

$$\int_a^b \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} dt = \int_a^b \text{RHS} = \int_a^b (\sqrt{u^2 + v^2})' dt = [\sqrt{u^2 + v^2}]_a^b = \|B\|$$

Oss. Ognuna di queste calibrazioni mostra la minimalità (GM) di tutte le rette della famiglia.

— o — o —

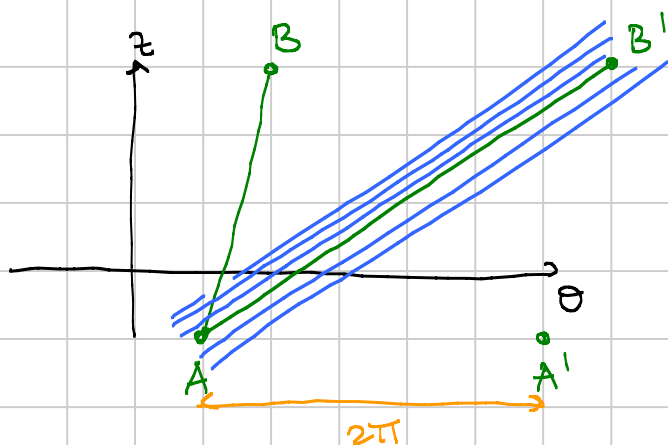
CASO DEL CILINDRO $x^2 + y^2 = 1$

Una curva nel cilindro la scrivo come

$$(\cos \theta(t), \sin \theta(t), z(t))$$

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Dati due pts sul cilindro, nello sviluppo diventano tanti punti a distanza 2π



Anche AB' risolve Eulero
ma non è (GM)

Posso calibrare AB' usando le rette // ad AB' nello sviluppo, che diventano eliche parallele. Questo mostra che AB' è (SLM).

CASO DELLA SFERA

Uso coord. sferiche (quelle dei geografi):
 $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

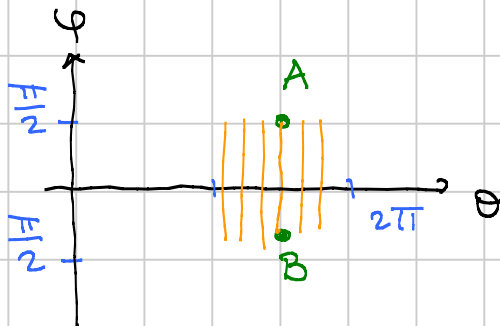
Una curva $(\theta(t), \varphi(t))$ ha lunghezza

$$\text{lunghe} = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \cos^2 \varphi \dot{\theta}^2} dt \quad (\text{controllare})$$

Wlog assumiamo che A sia il polo NORD. Vorrei che la geodetica avesse $\theta = \text{costante}$, cioè $\dot{\theta} = 0$

Calibro:

$$\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \cos^2 \varphi \cdot \dot{\theta}^2} \geq |\dot{\varphi}|$$



$$\int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \cos^2 \varphi \cdot \dot{\theta}^2} dt \geq \int_a^b |\dot{\varphi}| dt$$

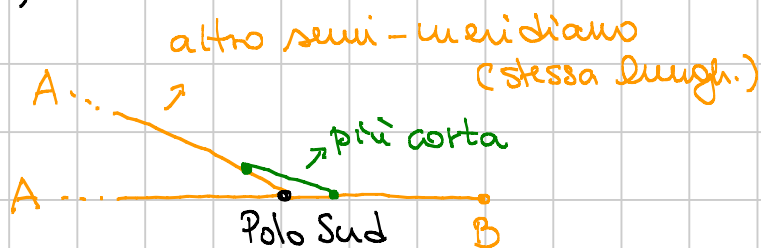
$$\geq \left| \int_a^b \dot{\varphi}(t) dt \right| = |\varphi_B - \varphi_A|$$

Geometricamente sto calibrando con i meridiani.

L'altro pezzo di meridiano (A → polo Sud → B) cos'è?

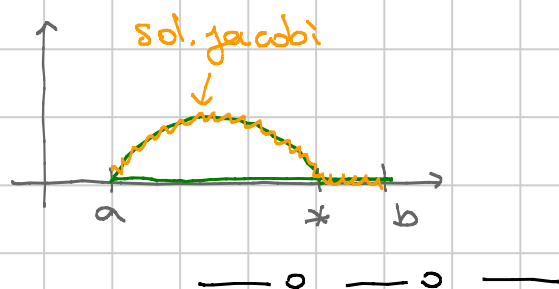
Risolve Eulero (basta verificare).

Non è nemmeno (WLM)



Sorprendente: il polo sud è il pto coniugato del Polo Nord, quindi le sol. di Eulero e passano per il polo Sud NON possono essere (WLM).

Ritorno al passato: se c'è un pto coniugato tra a e b le sol. di Eulero non possono essere WLM



Noni ma non posso :

MIRACOLO DELLE GEODETICHE

La curva a valori in una qualunque superficie che minimizza

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt$$

è una geodetica, cioè minimizza anche

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Inoltre il minimo di sopra è l'unica geodetica percorsa a velocità costante.

Si tratta di vedere che le sol. di Eulero della prima lo sono anche della seconda.

— o — o —