

Convessificata (o involucro convesso) di una funzione

Def. Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione qualunque.

Si dice convessificata di ψ la funzione $\psi^{**}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\psi^{**}(x) := \sup \{ \varphi(x) : \varphi \text{ è convessa e } \varphi(y) \leq \psi(y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \}$$

Oss. la definizione ha senso se esiste almeno una $\varphi \leq \psi$ con φ convessa. In caso contrario si può porre $\psi^{**} \equiv -\infty$.

Proposizione Date ψ e ψ^{**} come sopra, si ha

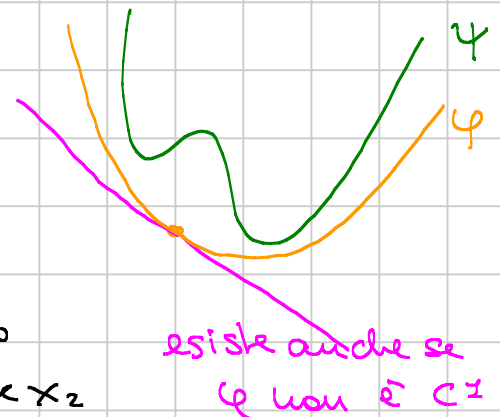
- (i) ψ^{**} è convessa (fatto generale: il sup di convesse è convesso ad esempio via epigrafici)
- (ii) $\psi^{**}(x) \leq \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- (iii) $\psi^{**}(x) = \psi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \psi$ è convessa
- (iv) ψ^{**} è continua (le convesse in $\mathbb{R}$ lo sono)
- (v) basta fare il sup sulle rette

$$\psi^{**}(x) = \sup \{ ax + b : ay + b \leq \psi(y) \quad \forall y \in \mathbb{R} \}$$

(ogni valore $\varphi(x)$ di una φ convessa $\leq \psi$ è anche valore $\varphi(x)$ di una retta $\varphi(x) \leq \psi$ ovunque)

- (vi) $\psi^{**}(x)$ è l'inf di tutti i segmenti che congiungono due p.ti del grafico $(x_1, \psi(x_1)), (x_2, \psi(x_2))$ con $x_1 < x < x_2$

[Esercizio]



TEOREMA

Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua (ma basta meno)
con ipotesi di crescita almeno quadratica (basta
superlineare)

Allora il rilassato di

$$F(u) = \int_a^b \psi(u) dx \quad \text{pensato in } C^1 \text{ o } C^\infty$$

a L^2 o C^0 è

$$\bar{F}(u) = \int_a^b \psi^{**}(u) dx.$$

(se $u \in L^2$ esiste e
l'integrale è finito,
+ ∞ altrimenti)

Dim.: Chiamo $G(u)$ il RHS. È facile che $\bar{F}(u) \geq G(u)$.

Il motivo è che

$$F(u) \geq G(u) \quad \text{in } C^1 \text{ o } C^\infty$$

e inoltre $G(u)$ è sci in L^2 o in C^0 .

Qui ho già usato la crescita

Devo fare il limsup, cioè per ogni $u \in L^2$ con $G(u) < +\infty$ devo esibire

$$C^1 \ni u_n \rightarrow u \quad \text{con} \quad \limsup F(u_n) \leq G(u)$$

Step 1 Farlo nel caso in cui u è una retta.

Prendo una retta $u(x) = px + q$.

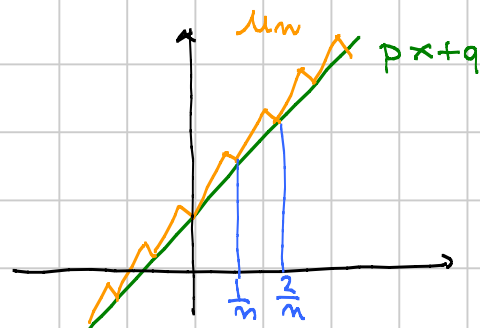
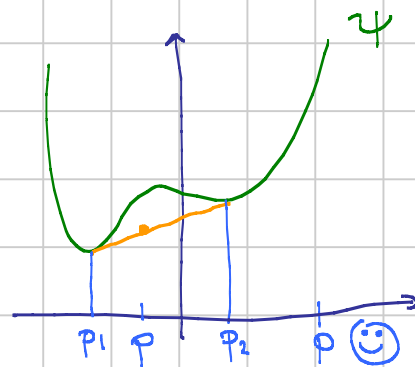
Se $\psi^{**}(p) = \psi(p)$ non c'è nulla da
fare, cioè uso $u_n \equiv u$.

Altrimenti esistono p_1 e p_2 e $\lambda \in [0, 1]$ t.c.

$$p = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2$$

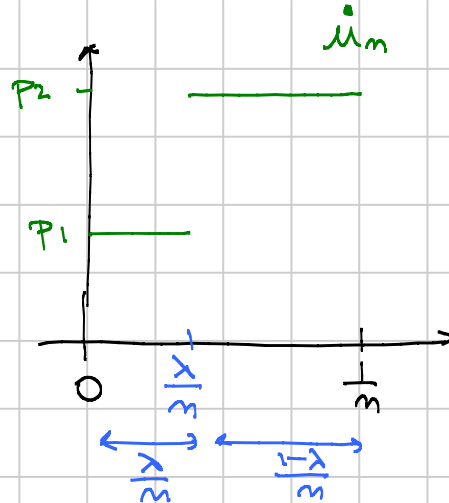
$$\psi^{**}(p) = \lambda \psi(p_1) + (1-\lambda) \psi(p_2)$$

Costruisco u_n in modo che in ogni
tratto di ampiezza $\frac{1}{n}$ abbia derivata
un po' p_1 e un po' p_2 in rapporto
 $\lambda, (1-\lambda)$



In questo modo $u_n(x)$ coincide con u agli estremi di ogni intervallo.
Se chiamo x_k gli estremi

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(\dot{u}_n(x)) dx = \frac{\lambda}{n} \psi(p_1) + \frac{1-\lambda}{n} \psi(p_2) \\ = \frac{1}{n} \psi^{**}(p) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi^{**}(\dot{u}(x)) dx$$



Sommando su tutti i tratti abbiamo ottenuto che

$$\int_a^b \psi(\dot{u}_n(x)) dx = \int_a^b \psi^{**}(\dot{u}(x)) dx$$

Step 0 $\bar{F}(u) \leq \int \psi(u)$ per ogni u affine a tratti

Tornando allo step 1, è facile che $u_n(x) \rightarrow u(x)$ unif. su $[a,b]$, perché le oscillazioni sono proporzionali a $\frac{1}{n}$ in ogni tratto.

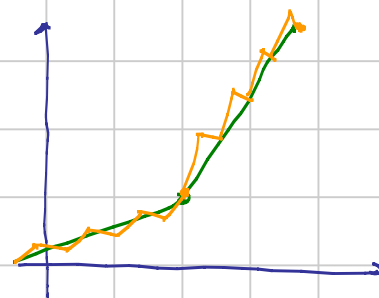
Alla fine dello step 1 sappiamo che

$$\bar{F}(u) \leq G(u) \quad \forall u \text{ retta.}$$

Step 2 Sia ora u affine a tratti. Basta ripetere la procedura in ogni tratto, quindi

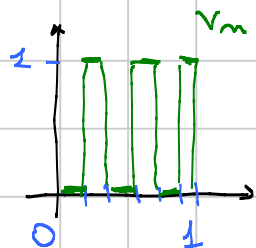
$$\bar{F}(u) \leq G(u) \quad \forall u \text{ affine a tratti}$$

Step 3 Le affini a tratti sono dense in energia per il lemma della les. precedente.



— o — o —

Esempio



$$v_m \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\int v_m \varphi \rightarrow \int \frac{1}{2} \varphi \quad \forall \varphi \in \dots$$

Basta dimostrarlo per $\varphi =$ caratteristica di un intervallo 😊

Oss. Quando p non sta esattamente su un segmento che congiunge 2 pt del grafico uso la (vi) della proposizione per ottenere

$$\bar{F}(u) \leq G(u) + \varepsilon \quad \leadsto \text{corretto dopo video}$$

$$G(u) \leq \bar{F}(u) + \varepsilon \quad \forall u \text{ retta}$$

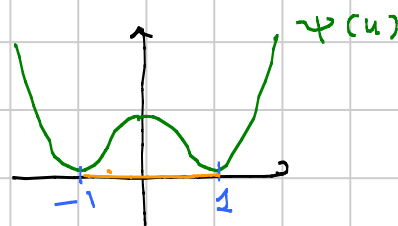
e quindi posso passare $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e ritornare a

$$\bar{F}(u) \leq G(u) + \varepsilon \quad \leadsto \text{corretta dopo video}$$

$$G(u) \leq \bar{F}(u) \quad \forall u \text{ retta.}$$

Esempio
$$\int_0^3 \left[\underbrace{(u^2 - 1)^2}_{\psi} + (u - \sin x)^2 \right] dx = F(u)$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([0, 3]) \}$$



Dico che $\min$ N.E. e $\inf = 0$

$$\sup F(u) = \sup \bar{F}(u) = \int_0^3 \psi^{**}(u) + (u - \sin x)^2$$

e ogni u_n succ. minimizzante tende a $\sin x$

— 0 — 0 — 0 —