

RILASSAMENTO DI FUNZIONALI INTEGRALI

$$F(u) = \int_a^b \psi(\dot{u}) dx$$

Possiamo pensare $F(u)$ definito per $u \in C^1([a, b])$.

Vogliamo estenderlo per rilassamento ad un ambiente più grande tipo H^1 , C^0 , L^2 , L^1 , ...

Parole d'ordine: $\rightarrow$ convessità
 $\rightarrow$ crescita.

Ipotesi di crescita $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo

$$\exists a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} \quad \psi(p) \geq ap^2 - b \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

Basta in realtà meno, cioè crescita superlineare

$$\liminf_{p \rightarrow \pm\infty} \frac{\psi(p)}{|p|} > 0$$

Caso facile Se ψ è pure convessa, allora l'estensione per rilassamento ad $L^2((a, b))$ sarebbe

$$\bar{F}(u) = \int_a^b \psi(\dot{u}) dx \quad (\text{che può valere } +\infty)$$

$\uparrow$ derivata debole

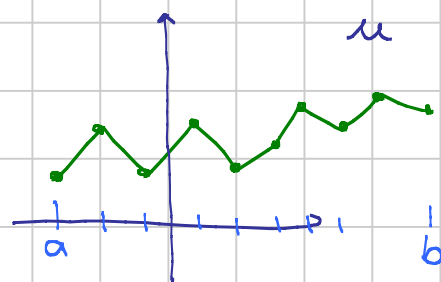
Dim. Il funzionale al RHS è sci per i teoremi di semicontinuità. Tutto sta a trovare la recovery, cioè per ogni u per cui il RHS è reale, trovare $u_n \xrightarrow{C^1} u$ tale che $F(u_n) \rightarrow \bar{F}(u)$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $C^1 \quad L^2$

Si lavora in due tappe

1ª tappa Per ogni u affine a tratti esiste la u_n (numero finito di tratti).

La derivata u' è costante a tratti.

Approssimo u con funzioni u_n suff. regolari e pago pochissimo

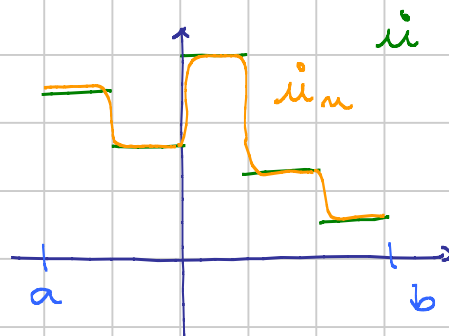


2ª tappa Dalla 1ª tappa sappiamo che

$$\overline{F}(u) \leq \int_a^b \psi(u') dx$$

per ogni u affine a tratti.

Ci basta dimostrare che le affini a tratti sono un denso in energia, wrt L^2



Lemma Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa con l'ipotesi di crescita almeno quadratica.

Sia $u \in H^1(a, b)$ tale che

$$\int_a^b \psi(u') dx < +\infty$$

Allora esiste $u_n \rightarrow u$ in L^2 con le u_n affini a tratti tale che

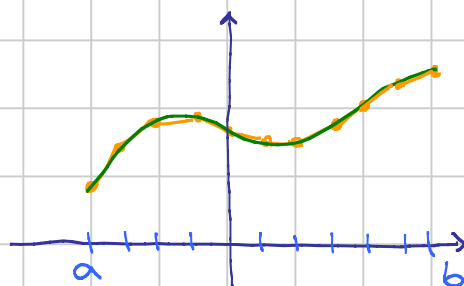
$$\int_a^b \psi(u'_n) dx \rightarrow \int_a^b \psi(u') dx$$

Dim. Dalle Hp. di crescita deduco che u è continua, anzi $\frac{1}{2}$ -Hölder.

Divido $[a, b]$ in n parti uguali e collego i pti sul grafico.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$\int_a^b u'^2 dx < +\infty, \text{ quindi}$$



In ogni tratto vale

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(u_m) dx \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} \psi(u) dx$$

"

$$(x_k - x_{k-1}) \psi\left(\frac{u(x_k) - u(x_{k-1})}{\frac{b-a}{n}}\right)$$

per almeno 2 motivi

→ in ogni tratto se minimizzo $\int_{\text{tratto}} \psi(v)$ tra tutte le v che coincidono con u al bordo del tratto, il minimo è proprio la retta

→ disuguaglianza di Jensen, la cui dimostrazione è la stessa dell'ottimalità della retta congiungente.

Sommando sui vari tratti

$$\int_a^b \psi(u_m) dx \leq \int_a^b \psi(u) dx,$$

da cui

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(u_m) dx \leq \int_a^b \psi(u) dx$$

che è la disug. difficile (che implica il limite).

È poi immediato che

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \quad \text{unif. in } [a, b].$$

Questo segue dall'uniforme continuità di u .

Oss. Che cosa abbiamo ottenuto / usato

→ ottenuto densità in energia in L^2 e C^0

→ usato solo la continuità di u .

Cosa succede senza ipotesi di crescita

Esempio 1 $F(u) = \int_a^b \sin(u) dx$

Il rilassato in L^2 o in C^0 è il funzionale banale

$$\bar{F}(u) = -(b-a) \quad (\text{come se integrassi } -1)$$

Il liminf è ovvio, il limsup va conquistato (vediamo dopo)

Esempio 2 $F(u) = \int_a^b \sqrt{1+u^2} dx$

Problema: crescita 1.

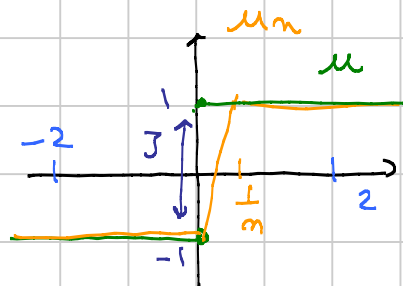
In questo caso esistono funzioni discontinue in cui il rilassato è FINITO.

$$[a,b] = [-2,2]$$

Facile: il rilassato ha la stessa forma per le u affini a tratti

A questo pto approssimo u in modo ovvio

$$F(u_m) = \int_0^{\frac{1}{m}} \sqrt{1+(2m)^2} dx = \frac{1}{m} \sqrt{1+4m^2} \rightarrow 2 = J$$

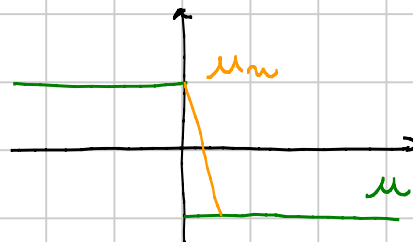


Esempio 3 $F(u) = \int_a^b e^u dx$

Problema: e^u cresce solo da una parte

$$\exists u_m \rightarrow u \quad \text{t.c.} \quad F(u_m) \rightarrow b-a$$

$$\int_0^{\frac{1}{m}} e^{-2m} = \frac{1}{m} e^{-2m}$$



Tutte le u decrescenti (anche discontinue) pagano "nulla".