

Lemma (misterioso) Sia $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.

Allora esiste una famiglia di funzioni $\psi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

(i) $\psi_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ per ogni $\varepsilon > 0$

(ii) $|\psi'_\varepsilon(x)|$ è limitata per ogni $\varepsilon > 0$ (la limit. dipende da ε)

(iii) $\psi_\varepsilon(x) \leq \psi(x)$ per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni $x \in \mathbb{R}$

(iv) $\psi_\varepsilon(x) \rightarrow \psi(x)$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Oss. La dim. è facile se $\psi \in C^1$: basta troncare la derivata tra $-\frac{1}{\varepsilon}$ e $\frac{1}{\varepsilon}$.

Altrimenti bisogna prima regolarizzare.

Teorema Sia $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa.

Sia $v_m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni.

Supponiamo che

(i) esiste una costante $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\int_a^b \psi(v_m(x)) dx \leq M$$

(ii) $v_m \rightharpoonup v_\infty$ debole in L^1 (che è il più debole di tutti)

Allora

$$\int_a^b \psi(v_\infty(x)) dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_m(x)) dx$$

Oss. È un teorema di semicontinuità assumendo la compattezza

Dim. Ritorno la ψ_ε del lemma misterioso e su quella

$$\begin{aligned} M &\geq \int_a^b \psi(v_m) dx \geq \int_a^b \psi_\varepsilon(v_m) dx \\ &\geq \int_a^b \psi_\varepsilon(v_\infty) + \underbrace{\int_a^b \psi'_\varepsilon(v_\infty) (v_m - v_\infty)}_{\downarrow 0} \end{aligned}$$

da cui $\int_a^b \psi_\varepsilon(v_\infty) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi(v_n)$

Concludo con Beppo Levi. $\square$

— o — o —

Oss. L'ipotesi (i) in realtà non è stata usata. Certo se il liminf è $+\infty$ la tesi è banalmente vuota.

— o — o —

Teorema Sia $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\liminf_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} > 0$$

(il che è equivalente a dire che $\psi(t) \geq c_1 t^2 - c_2$ per opportune costanti positive c_1 e c_2).

Sia $v_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni tale che

$$\int_a^b \psi(v_m(x)) dx \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

per una opportuna M .

Allora a meno di sottosucc. $v_m \rightarrow v_\infty$ in $L^2((a, b))$, cioè esiste $n_k \rightarrow \infty$ ed esiste $v_\infty \in L^2$ t.c.

$$v_{n_k} \rightarrow v_\infty \quad \text{per } k \rightarrow \infty.$$

Dim. Vedi inizio esempio motivazionale. $\square$

Teorema (Vero, ma qui non dimostrabile)

$$\psi(x) \geq c_1 |x|^p - c_2 \quad \text{con } p > 1 \quad \leadsto \quad v_n \rightarrow v_\infty \quad \text{in } L^p((a,b))$$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\psi(t)}{|t|} = +\infty \quad \leadsto \quad v_n \rightarrow v_\infty \quad \text{in } L^1((a,b))$$

Oss. (Non capibile) se $\psi(t) \geq c_1 |t| - c_2$ e basta, allora
entra in gioco BR.
— o — o —

Mettendo insieme i teoremi dimostrati possiamo fare il metodo diretto per funzionali del tipo

$$F(u) = \int_a^b \psi(u) + g(x, u)$$

purché ψ soddisfi le ipotesi $\psi(x) \geq c_1 x^2 - c_2$.
— o — o —

Esempio motivazionale

$$F(u) = \int_a^b [(1+u^2) u^4 + \sin u] dx$$

Voglio fare il minimo con DBC.

Penso una ~~un~~ minimizzante. Da $F(u_n) \leq M$ deduco

$$\int_a^b u_n^4 \leq M_2$$

Da qui deduco che a meno di s.suc. $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. (A.A.)
e

$$u_n \rightarrow u_\infty \quad \text{in } L^2 \quad (\text{e volendo pure in } L^4)$$

↓
senza prima che $u_\infty \in L^4$

Mi servirebbe la semicontinuità

Proviamo a mano cosa succede

$$\begin{aligned}\int (1+u_m^2) u_m^4 &= \int (1+u_m^2) [u_\infty + (u_m - u_\infty)]^4 \\ &\geq \int (1+u_m^2) u_\infty^4 + 4 \int (1+u_m^2) u_\infty^3 (u_m - u_\infty)\end{aligned}$$

$\uparrow \quad \quad \quad \quad \quad \uparrow$
 $\psi(u_\infty) \quad \quad \quad \psi(u_\infty)$

ci servirebbe

$$\int (1+u_m^2) u_\infty^3 (u_m - u_\infty) \rightarrow 0$$

$$\int (1+u_m^2) u_\infty^4 \rightarrow \int (1+u_\infty^2) u_\infty^4$$

La 2^a è come dire che

$$\int u_\infty^4 (u_m^2 - u_\infty^2) \rightarrow 0$$

questo è $\leq \varepsilon$ per n grande
per convergenza uniforme

Il 1^o sarebbe facile se avessi $\underbrace{\int (1+u_\infty^2) u_\infty^3}_{\in L^{4/3}} \underbrace{(u_m - u_\infty)}_{\rightarrow 0 \text{ in } L^4} \rightarrow 0$

Non resta che aggiungere e togliere ed il resto tende a 0 per convergenza uniforme

$$\int \underbrace{(u_m^2 - u_\infty^2)}_{\leq \varepsilon} u_\infty^3 (u_m - u_\infty)$$

$$\begin{aligned}|\int () u_\infty^3 (u_m - u_\infty)| &\leq \varepsilon \int |u_\infty|^3 \cdot |u_m - u_\infty| \\ &\leq \varepsilon \|u_\infty\|_{4/3}^3 (\|u_m\|_4 + \|u_\infty\|_4)\end{aligned}$$

Teorema generale (Si dimostra bene nei casi particolari)

$$F(u, v) = \int_a^b \psi(x, u, v) dx \quad \psi(x, s, p)$$

Ipotesi : $\rightarrow$ continuità in tutte le variabili
 $\rightarrow$ convessità in p per ogni (x, s) fissi

Se $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. e $v_n \rightarrow v_\infty$ debole L^2 , allora
c'è SCI, cioè

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n, v_n) \geq F(u_\infty, v_\infty)$$

Esercizio : provare a fare la dimostrazione.

Se ψ è C^1 nell'ultima variabile con derivata
limitata sarebbe fatta!