

Esempio motivazionale

$$F(u) = \int_0^1 (u^4 + u^2) dx$$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([a,b]), u(0)=0, u(1)=3 \}$$

Strumenti per il metodo diretto:

Sapendo che $\int_0^1 u^4 dx \leq M$ deduco che u è $\frac{3}{4}$ -Hölder

$$u \in L^p \Rightarrow u \in \text{Holder } \frac{1}{q} \text{ con } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Prendendo una succ. con $\int_0^1 u_n^4 \leq M$ posso applicare A.A.

e dedurre che, a meno di s.succ., $u_n \rightarrow u_\infty$ unif.

E la derivata? Prima soluzione: appoggiarsi su L^2 .

Poiché

$$x^4 \geq x^2 + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

da una limitazione su u_n^4 deduciamo una limit. su u_n^2 (uso che $[a,b]$ è limitato). In altre parole

$$\{u_n\} \text{ limitata in } L^4 \Rightarrow \{u_n\} \text{ limitata in } L^2$$

e quindi a meno di s.succ. $u_n \rightarrow v_\infty$ che poi è u_∞ per lo stesso motivo di sempre.

L'unica cosa usata è che $4 \geq 2$.

Domanda: è vero che $v_\infty = \dot{u}_\infty \in L^4$ e che

$$\int_0^1 \dot{u}_\infty^4 \leq \liminf \int_0^1 \dot{u}_n^4 \quad ?$$

Ritorno al passato:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi(\dot{u}_n) &= \int_0^1 \psi(\dot{u}_\infty + (\dot{u}_n - \dot{u}_\infty)) dx \\ &\geq \underbrace{\int_0^1 \psi(\dot{u}_\infty) + \psi'(\dot{u}_\infty)(\dot{u}_n - \dot{u}_\infty) dx}_{\downarrow ?} \end{aligned}$$

se ψ è convessa
e C^1

Se so che $\dot{u}_n - \dot{u}_\infty \rightarrow 0$ in L^2 avrei il limite voluto se $\psi'(\dot{u}_\infty) \in L^2$.

Parentesi Convergenza debole più in generale

$$v_n \rightharpoonup v_\infty \text{ in } L^2((a,b)) \Leftrightarrow \int_a^b v_n \varphi \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in L^2((a,b))$$

$$v_n \rightharpoonup v_\infty \text{ in } L^p((a,b)) \Leftrightarrow \int_a^b v_n \varphi \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in L^q((a,b))$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$v_n \rightharpoonup v_\infty \text{ in } L^1((a,b)) \Leftrightarrow \int_a^b v_n \varphi \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in L^\infty((a,b))$$

Oss. Più p è piccolo, più è facile convergere debolmente, perché l'insieme delle funzioni test si riduce.

Quindi la convergenza debole L^1 è la più debole di tutte.

Supponiamo di sapere nell'esempio che $u_m \rightarrow u_\infty$ in L^4 .
Questo dice che

$$\int_0^1 (u_m - u_\infty) \varphi \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in L^{\frac{4}{3}}$$

A me serviva $\int_0^1 (u_m - u_\infty) u_\infty^3 \rightarrow 0$

$\uparrow$
 $\psi'(u_\infty)$
 $\in L^{4/3}$

e quindi avrei il limite che voglio.

Quindi le domande diventano: se v_m è limitata in L^4 e
 $v_m \rightarrow v_\infty$ in L^2
 è vero che $v_m \rightarrow v_\infty$ in L^4 , e quindi anche $v_\infty \in L^4$?

Se la risposta è affermativa, abbiamo semicontinuità e compattezza.

Proposizione Supponiamo che v_m sia una successione di funzioni in $[a, b]$ t.c.

(i) $\{v_m\}$ è limitata in L^p per un qualche $p > 1$

(ii) $v_m \rightarrow v_\infty$ nel senso L^1 , cioè il più debole di tutti

(iii) $v_\infty \in L^p$

Allora $v_m \rightarrow v_\infty$ in L^p .

Dim. Per ipotesi sappiamo che $\int_a^b (v_m - v_\infty) \varphi \rightarrow 0 \quad \forall \varphi \in L^\infty$

Tesi: stessa cosa con $\varphi \in L^q$.

Data $\varphi \in L^q$ fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo $\psi \in L^\infty$ t.c. $\|\varphi - \psi\|_q \leq \varepsilon$

Ora aggiungo e tolgo

$$\int_a^b (v_n - v_\infty) \varphi = \underbrace{\int_a^b (v_n - v_\infty) \psi}_{\substack{\downarrow \text{ per ipotesi} \\ 0}} + \int_a^b (v_n - v_\infty) (\varphi - \psi)$$

$$\left| \int_a^b (v_n - v_\infty) (\varphi - \psi) \right| \leq \underbrace{\|v_n - v_\infty\|_p}_{\substack{\uparrow \\ \text{Hölder}}} \|\varphi - \psi\|_q$$

$$\leq \underbrace{(\|v_n\|_p + \|v_\infty\|_p)}_{\substack{\text{per ipotesi } \tilde{v} \\ \text{equilibrato}}} \cdot \varepsilon$$

Questo basta per concludere che LHS $\rightarrow 0$, quindi ho conv. debole in L^p .

— o — o —

Quindi l'esempio motivazionale è ok se so che $\tilde{u}_\infty \in L^4$.

— o — o —

Tornando all'esempio: $\int_0^1 \tilde{u}_n^4 \leq M \quad \tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u}_\infty \text{ in } L^2$

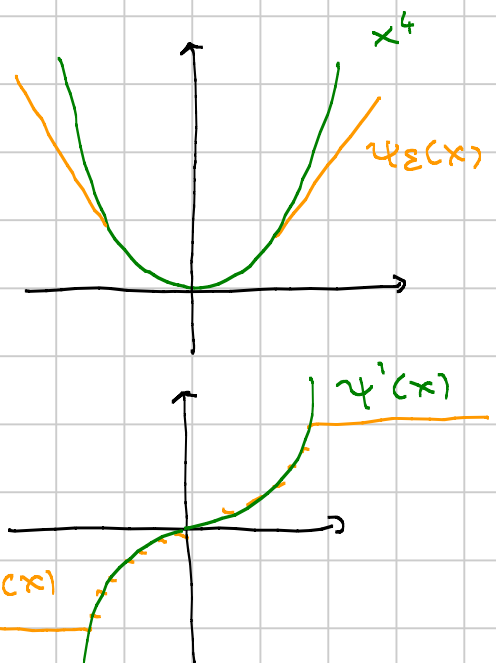
$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \tilde{u}_\infty \in L^4$$

$$\int_0^1 \psi_\varepsilon(\tilde{u}_n) \geq \int_0^1 \psi_\varepsilon(\tilde{u}_\infty) + \int_0^1 \psi'_\varepsilon(\tilde{u}_\infty) (\tilde{u}_n - \tilde{u}_\infty)$$

Posso approssimare dal basso $\psi(x) = x^4$ con delle funzioni convesse con derivata limitata. Ora

$$M \geq \int_0^1 \tilde{u}_n^4 \geq \int_0^1 \psi_\varepsilon(\tilde{u}_n)$$

$$\geq \int_0^1 \psi_\varepsilon(\tilde{u}_\infty) + \int_0^1 \psi'_\varepsilon(\tilde{u}_\infty) (\tilde{u}_n - \tilde{u}_\infty)$$



Per dire che

$$\int_0^1 \psi'_\varepsilon(\tilde{u}_\infty) (\tilde{u}_m - \tilde{u}_\infty) \rightarrow 0$$

ho usato solo che $\tilde{u}_m \rightarrow \tilde{u}_\infty$ in L^1

Passando al limite otteniamo che

$$M \geq \int_0^1 \psi_\varepsilon(\tilde{u}_\infty) dx \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0.$$

NON SI PUÒ CONCLUDERE CON CONVERGENZA DOMINATA

MA posso concludere con Beppo - Levi.