

Calcolo delle variazioni per integrali multipli

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e l'incognita è $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

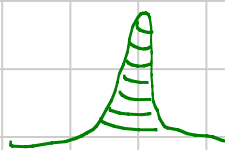
$\rightarrow \mathbb{R}^4 \rightsquigarrow$ grossi GUA

Esempio classico (integrale di Dirichlet) $\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$$F(u) = \int_{\Omega} \psi(\nabla u) = \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy$$

Ora DBC = assegnare $u(x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

Oss. (Non dimostrata) Se assegno $u(x)$ per $x \in$ insieme finito l'inf. viene 0 sempre.



Capacità di un sottoinsieme $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è definita come l'inf. del funzionale tra tutte le u nulle al bordo e 1 su S .
Ha senso assegnare BC su insiemi di capacità $\neq 0$.

— o — o —

Calcoliamo variazionale prima. Scegli $v \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$ e calcolo

$$\begin{aligned} F(u+tv) &= \int_{\Omega} |\nabla(u+tv)|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u + t \nabla v|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + t^2 |\nabla v|^2 + 2t \langle \nabla u, \nabla v \rangle) dx \end{aligned}$$

Derivo e metto $t=0$. Ottengo

$$\boxed{\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = 0} \quad \forall v \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$$

Prima forma integrale di Eulero

Ora applico Gauss-Green

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx = \int_{\partial\Omega} f(\vec{E}, \vec{n}) \, d\sigma - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx$$

Scelgo $f = u$, $\vec{E} = \nabla u$

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla u \rangle \, dx = - \int_{\Omega} u \cdot \Delta u \, dx = 0$$

$$\boxed{\int_{\Omega} \Delta u \cdot u \, dx = 0 \quad \forall u \in C_c^\infty(\bar{\Omega})}$$
 Eulero 2^a
forma
integrale

FLCV (funzione uguale) $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta u = 0}$ Eulero
differenziale
+ B.C.

— o — o —

Prima variante Metto D.B.C. solo su 3 lati del quadrato

1^a fase Uso $u \in C_c^\infty$ come prima e ritrovo $\Delta u = 0$

2^a fase Ritorno nella 1^a forma integrale di Eulero e integro per parti. Arrivo

$$0 = \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla u \rangle \, dx = \underbrace{- \int_{\Omega} \Delta u \cdot u \, dx}_{\substack{0 \\ \text{per 1^a fase}}} \pm \underbrace{\int_{\partial\Omega} u \langle \nabla u, \vec{n} \rangle \, d\sigma}_{\substack{\text{nullo per DBC su} \\ \text{3 lati (vsi dove} \\ \text{annullare sui 3 lati)}}$$

Sul restante lato u è praticamente arbitraria, quindi

$\langle \nabla u, \vec{n} \rangle = 0$ sul lato libero (FLCV sul lato)

"
 $\frac{\partial u}{\partial n}$

= derivata direzionale in direzione $\perp$ al bordo.

Alla fine dovrai risolvere

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u = \text{data} \quad \text{su tre lati di } \partial\Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sul restante lato}$$

↑
N.B.c. su un pezzo

— 0 — 0 —

Esempio 1 $\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - fu) \, dx = F(u) \quad \Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$

$$\min \{ F(u) : u \in C^1(\Omega) \text{ e } u = 0 \text{ su } \partial\Omega \}$$

Euler diventa
$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Si può risolvere usando serie di Fourier sul quadrato

$$u_{m,n}(x,y) = \sin(nx) \sin(my) \quad \begin{array}{l} \text{base Hilbertiana} \\ \text{(va rinormalizzata)} \\ \text{di } H^1(\Omega) \end{array}$$

$$\Delta u_{m,n} = -(n^2 + m^2) u_{m,n}$$

Unicità è fatto che sia minimo discende dalla convessità del funzionale, esatto. come in una variabile.

— 0 — 0 —

Eq. di Eulero più in generale

$$F(u) = \int_{\Omega} \psi(x, u, \nabla u) \, dx \quad \psi: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Se facciamo il solito conto

$$\delta F(u, v) = \int_{\Omega} \psi_s(x, u, \nabla u) v + \langle \nabla_p \psi(x, u, \nabla u), \nabla v \rangle \, dx$$

1ª forma integrale di Eulero

Integrale per parti (Gauss-Green) ottengo

$$\int_{\Omega} [\psi_s(x, u, \nabla u) - \operatorname{div} \nabla_p \psi(x, u, \nabla u)] v = 0$$

da cui la forma diff. di Eulero

$$\operatorname{div} [\nabla_p \psi(x, u, \nabla u)] = \psi_s(x, u, \nabla u)$$

Un'eventuale condizione di Neumann diventa

$$\langle \nabla_p \psi(x, u, \nabla u), \vec{n} \rangle = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

Esempio

$$\Delta u = u^5$$

BUONA

$$\Delta u = -u^5$$

CATTIVA

Sono le equazioni di Eulero di

$$F(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{6} \int u^6$$



Funzionale convesso:

→ ragionevole esistenza via metodo diretto

→ unicità praticamente gratis

$$F(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{6} \int u^6$$



Manca tutto

→ convessità no

→ limitatezza delicata

→ unicità critica.

— o — o —