

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGEAnalisi 2 : $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ funzione $\leadsto$ min

vincolo

 $x_0 \in \mathbb{R}^m$ è p.to di minimo locale vincolato $\Leftrightarrow \exists r > 0$ t.c.

$$F(x_0) \leq F(x) \quad \forall x \in B_r(x_0) \text{ t.c. } G(x) = 0$$

Teo. mult. Lagrange Se x_0 è p.to di min. loc. vincolato e F e G sono di classe C^1 , allora vale almeno una delle seguenti due alternative

(i) $\nabla G(x_0) = 0$

(ii) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$

$\nearrow$ è come dire che x_0 è p.to
stazionario di $F(x) - \lambda G(x)$

Strategie dimostrative:

- (1) problemi penalizzati alla De Giorgi
- (2) usare teo. funzioni implicite per parametrizzare il vincolo
- (3) usare il teo. funzioni implicite solo in $\mathbb{R}^2$
- (4) usare teorema di invertibilità locale in $\mathbb{R}^2$

] simili

Dim (3)

Supponiamo di non essere nel caso (i), quindi $\nabla G(x_0) \neq 0$
Wlog supponiamo

$$\frac{\partial G}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$$

Considero $f_k(t, s) = F(x_0 + te_k + se_n) \quad k=1, \dots, m-1$

$g_k(t, s) = G(x_0 + te_k + se_n) \quad k=1, \dots, m-1$

dove $e_1, \dots, e_n$ sono i vettori della base canonica

Allora $g(0,0) = G(x_0) = 0$
 $g_s(0,0) = \frac{\partial G}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$

Per teorema del Dini 2-dim esiste $s: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $s(0) = 0$

$$g(t, s(t)) = 0 \quad \text{per ogni } t \in (-\delta, \delta)$$

Questo ci dice che $x_0 + t e_k + s(t) e_n \in \text{vincolo}$ per ogni $t \in (-\delta, \delta)$,
 quindi

$$f(t, s(t)) \geq f(0,0) \quad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

quindi

$$\left. \frac{d}{dt} f(t, s(t)) \right|_{t=0} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(0,0) + \frac{\partial F}{\partial x_n}(0,0) s'(0) = 0$$

Dal teorema del Dini otteniamo $s'(0) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial t}(0,0)}{\frac{\partial g}{\partial s}(0,0)} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial x_k}(x_0)}{\frac{\partial G}{\partial x_n}(x_0)}$

Sostituendolo otteniamo

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0) = \boxed{\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0)}{\frac{\partial G}{\partial x_n}(x_0)}} \frac{\partial G}{\partial x_k}(x_0)$$

λ che NON DIPENDE
da k

— 0 — 0 —

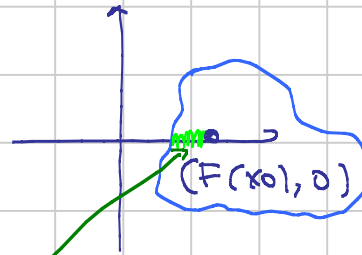
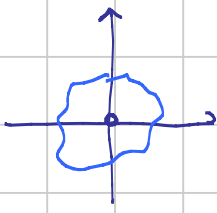
Dim 4 Considero $f_k(t,s)$ e $g_k(t,s)$ come sopra.

Considero poi

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \Phi(t,s) = (f(t,s), g(t,s))$$

$$\Phi(0,0) = (f(x_0), 0) \quad J\Phi(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0) & \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x_k}(x_0) & \frac{\partial G}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Se fossero false (i) e (ii), allora $J\Phi(0,0)$ sarebbe invertibile, quindi Φ sarebbe localmente invertibile vicino a $(0,0)$, quindi $(F(x_0), 0)$ sarebbe interno all'immagine



Questi punti hanno $G=0$, quindi provengono dal vincolo, e hanno $f \leq F(x_0)$.

— 0 — 0 —

CASO DEI FUNZIONALI

$$F(u) = \int_a^b \psi(x, u, \dot{u}) dx$$

$$G(u) = \int_a^b \gamma(x, u, \dot{u}) dx$$

Voglio $\min \{ F(u) : u \in X \text{ e } G(u) = 0 \}$
 $\uparrow$
 reg., B.C.

Notazione $\delta F(u_0, v) =$ variazione prima di F in u_0 rispetto ad una direzione $v \in C_c^\infty(a, b)$
 $= \frac{d}{dt} F(u_0 + tv) \Big|_{t=0}$

Teorema Sotto ipotesi decenti su ψ e γ se $u_0(x)$ è p.to di min. vincolato (basta locale), allora vale almeno una di queste 2 possibilità

(i) $\delta G(u_0, v) = 0$ per ogni $v \in C_c^\infty(a, b)$, cioè u_0 è p.to stazionario di $G(u)$

(ii) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\delta F(u_0, v) = \lambda \delta G(u_0, v)$ per ogni $v \in C_c^\infty$
 (cioè $u_0(x)$ risolve Eq. Eulero di $F(u) - \lambda G(u)$)

Dim Vecchia ③ parola per parola.

Supponiamo che c) non valga. Allora

$$\exists v \in C_0^\infty \quad \text{t.c.} \quad \delta G(u_0, v) \neq 0.$$

Per ogni altra $w \in C_0^\infty$ definisco

$$f(t, s) = F(u_0 + tw + sv), \quad g(t, s) = G(u_0 + tw + sv)$$

Come prima $g(0, 0) = 0$, $g_s(0, 0) = \delta G(u_0, v) \neq 0$

Allora posso esplicitare

Aggiunto dopo video

$$g(t, s(t)) = 0 \quad \text{con} \quad s'(0) = \frac{-g_t(0, 0)}{g_s(0, 0)} = \frac{-\delta G(u_0, w)}{\delta G(u_0, v)}$$

Ma allora $f(t, s(t))$ ha derivata che si annulla per $t=0$.
Facendo il conto viene

$$\delta F(u_0, w) = \frac{\delta F(u_0, v)}{\delta G(u_0, v)} \delta G(u_0, w)$$

Esempio 1 $\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 \ddot{u}^2 dx}_{F(u)} : \underbrace{\int_0^1 u^2 dx = 8}_{G(u)}, u(0) = u(1) = 0 \right\}$

Il minimo esiste (metodo diretto) (il vincolo si mantiene passando al limite)

Sia $u_0(x)$ un p.to di minimo. Allora dico che

$\delta G(u_0, v) \neq 0$ per almeno qualche v . Altrimenti sarebbe $u \equiv 0$ che non soddisfa il vincolo (scrivere Eulero).

L'unica possibilità è che sia u_0 stazionario per $\underbrace{F(u) - \lambda G(u)}_{\psi(x, u, \ddot{u}) = \ddot{u}^2 - \lambda u^2}$

$$\begin{cases} \ddot{u} = -\lambda u \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad \text{Risolvendolo trovo } \lambda > 0 \text{ e } u(x) = a \cos(\sqrt{\lambda} x) + b \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

e trovo i 3 parametri imponendo BC e vincolo.

Esempio 2 $\min \left\{ \underbrace{\int_0^1 \dot{u}^2 dx}_{F(u)} : u(0)=0, u(1)=1, \underbrace{\int_0^1 u dx = 0}_{G(u)} \right\}$

Come prima si arriva a un stazionario per $F(u) - \lambda G(u)$ e questo ha equ. di Eulero

$$2\ddot{u} = \lambda$$

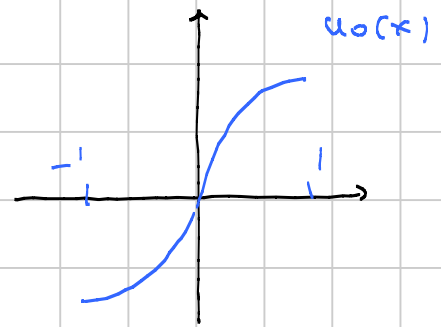
Allo stesso risultato si arrivava con DBR.

Esempio 3 $\min \left\{ \int_{-1}^1 \dot{u}^2 dx : \int_{-1}^1 u dx = 0, \int_{-1}^1 |u|^p dx = 8 \right\}$

Il minimo esiste.

Domanda: $u_0(x)$ è dispari?

Problema quasi aperto !!!!



— o — o —