

$$(E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow (F)$$

$(L^+) + (J^+) \Rightarrow (J^{++}) \Rightarrow$ esiste una soluzione di jacobí $w(x)$ tale $w(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

$$[C(x)\dot{w} + B(x)w]' = B(x)\dot{w} + A(x)w$$

dove

$$A(x) := \psi_{ss}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$$

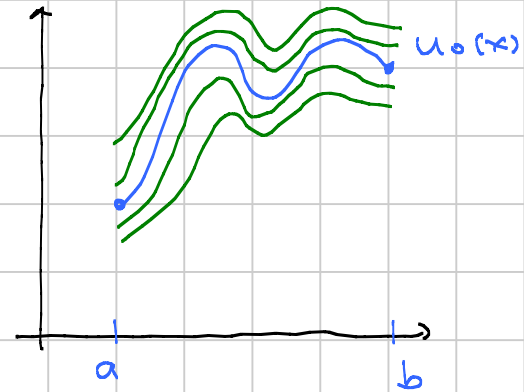
$$B(x) := \psi_{sp}(\dots)$$

$$C(x) := \psi_{pp}(\dots)$$

Definisco $u(\varepsilon, x)$ come la soluzione di (E) con dati iniziali

$$u(\varepsilon, a) = u_0(a) + \varepsilon w(a)$$

$$\dot{u}(\varepsilon, a) = \dot{u}_0(a) + \varepsilon \dot{w}(a)$$



Per $\varepsilon=0$ ritrovo $u(0, x) = u_0(x)$, per ε vicini troverò sol. vicine (per dipendenza continua).

Per avere (F) mi serve solo che $u_\varepsilon(\varepsilon, x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$
 $\forall \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$

Affinché $u_\varepsilon(\varepsilon, x)$ esista serve dipendenza C^1 dai dati iniziali.

Per di prendere ε_0 piccolo basta sapere che

$$u_\varepsilon(0, x) \geq c_0 > 0 \text{ per ogni } x \in [a, b]$$

Sorpresona: $u_\varepsilon(0, x) = w(x)$

Dim. (Quasi) Solvo Eulero $[\psi_p(x, u, \dot{u})]' = \psi_s(x, u, \dot{u})$

$$[\psi_p(x, u(\varepsilon, x), \dot{u}(\varepsilon, x))]' = \psi_s(x, u(\varepsilon, x), \dot{u}(\varepsilon, x))$$

$$[\psi_p(x, u(0, x), \dot{u}(0, x))]' = \psi_s(x, u(0, x), \dot{u}(0, x))$$

$$[\psi_p(x, u(\varepsilon, x), \dot{u}(\varepsilon, x)) - \psi_p(x, u(0, x), \dot{u}(0, x))]' = \psi_s - \psi_s$$

Le differenze le tratto con Lagrange

$$[\psi_{ps}(\dots)[u(\varepsilon, x) - u(0, \varepsilon)] + \psi_{pp}(\dots)[\dot{u}(\varepsilon, x) - \dot{u}(0, x)]]' =$$

$$\psi_{ss}(\dots)[u(\varepsilon, x) - u(0, \varepsilon)] + \psi_{sp}(\dots)[\dot{u}(\varepsilon, x) - \dot{u}(0, x)]$$

$\begin{matrix} \uparrow & \leftarrow & \text{dopo video} & \rightarrow & \uparrow \\ x & & & & \dot{u} \end{matrix}$

Divido per ε e chiamo $w_\varepsilon(x) = \frac{u(\varepsilon, x) - u(0, x)}{\varepsilon}$

$$[\underbrace{\psi_{ps}(\dots)}_{\downarrow \psi_{ps}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))} w_\varepsilon(x) + \underbrace{\psi_{pp}(\dots)}_{\downarrow C(x)} \dot{w}_\varepsilon(x)]' = \underbrace{\psi_{ss}(\dots)}_{\downarrow A(x)} w_\varepsilon + \underbrace{\psi_{sp}(\dots)}_{\downarrow B(x)} \dot{w}_\varepsilon$$

$\begin{matrix} \psi_{ps}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) \\ \text{"} \\ B(x) \end{matrix}$

Quindi $w_\varepsilon(x)$ risolve un'eq. diff. lineare i cui coeff. tendono ai coeff. dell'eq. di Jacobi, quindi $w_\varepsilon(x) \rightarrow w(x)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$.

Stessa cosa in versione analisi 2

$$\begin{aligned} \dot{y}_\varepsilon &= f(t, y_\varepsilon) \\ y_\varepsilon(0) &= \varepsilon \end{aligned}$$

Calcolare la derivata della soluzione rispetto ad ε .

Indicando con $u(\varepsilon, x)$ la soluzione, voglio calcolare

$$u_\varepsilon(0, x)$$

Idea: considerare il rapporto incrementale

$$w(\varepsilon, x) = \frac{\mu(\varepsilon, x) - \mu(0, x)}{\varepsilon}$$

Cosa risolve $w(\varepsilon, x)$? Calcolo la derivata

$$\begin{aligned}\dot{W}(\varepsilon, x) &= \frac{\dot{U}(\varepsilon, x) - \dot{U}(0, x)}{\varepsilon} = \frac{f(x, u(\varepsilon, x)) - f(x, u(0, x))}{\varepsilon} \\&= f_u(\dots) \frac{u(\varepsilon, x) - u(0, x)}{\varepsilon} \\&\quad " \\&\quad f_u(x, \xi_x) \\&= f_u(\dots) W(\varepsilon, x)\end{aligned}$$

Quindi $w(\varepsilon, x)$ resolve

$$\dot{W}(\varepsilon, x) = C(\varepsilon, x) W(\varepsilon, x)$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha $C(\varepsilon, x) \rightarrow f_u(x, u(0, x))$ e quindi $w(\varepsilon, x)$ tende alla soluzione di

$$\dot{w} = f_w(x, u(0, x)) w \quad \text{e} \quad w \in \mathcal{L}_2(0, x)$$

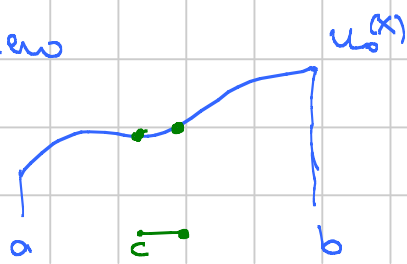
Oss. Supponiamo che $\psi(x, s, p)$ sia convessa in p , anzi
con $\psi_{pp}(x, s, p) > 0$ sempre. (S.L.M.)

Allora ogni soluzione di Eulero è un minimo[↑] se
rispetto ad un intervallo abbastanza piccolo.

Detto meglio: per ogni $c \in [a, b]$, esiste $d \in [a, b]$ t.c.

$$\int_c^d \psi(x, u(x), \dot{u}(x)) dx \geq \int_c^d \psi(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx$$

per ogni u t.c. $u(c) = u_0(c)$
 $u(d) = u_0(d)$

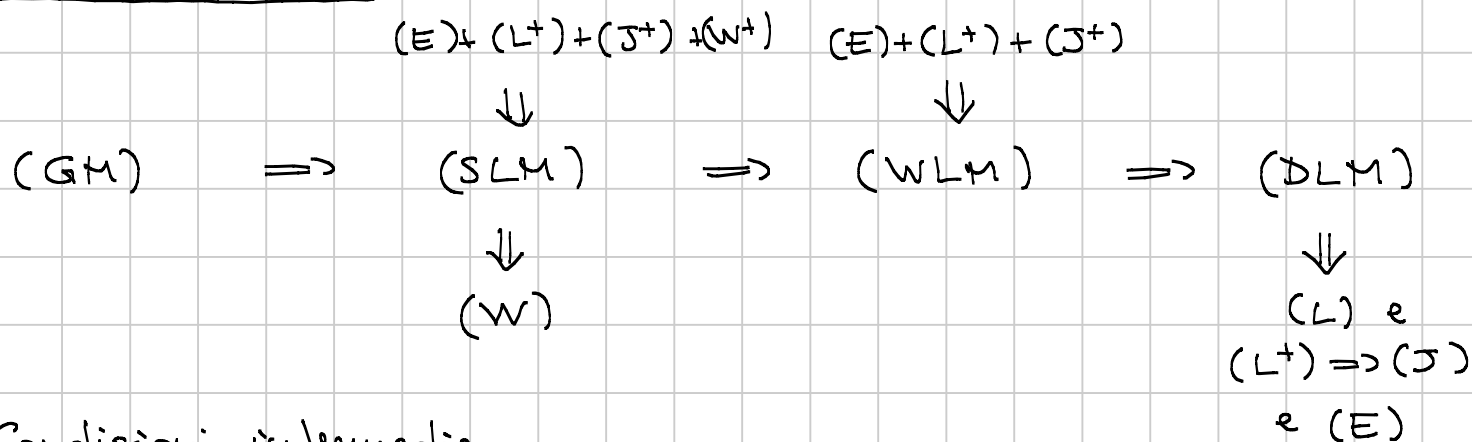


[Dim]: $(E) + (L^+) + (W^+)$ sono gratis.

Resta da verificare (J^+) e basta scegliere δ vicino a c per averla gratis.

— o — o —

RIASSUNTONE



Condizioni intermedie

$$(L^+) + (J^+) \Rightarrow (J^{++}) \Rightarrow (Z) \leftarrow \text{Riccati}$$

$$(E) + (J^+) + (L^+) \Rightarrow (F)$$

↑
subsolution theorem

— o — o —

Esempio 1

$$\int_0^l [u'^2 - \sin(u^2)] dx \quad u(0) = u(l) = 0$$

Per ogni $l > 0$ esiste il minimo (metodo diretto)

Domanda: quando il minimo è $u_0(x) \equiv 0$?

- Per $l > \pi$ non è nemmeno (DLM) perché manca (J) .

In fatti $\psi(x, s, p) = p^2 - \sin(s^2)$

$$C(x) = \psi_{pp} = 2 > 0 \text{ sempre}$$

$$B(x) = \psi_{sp} = 0$$

$$A(x) = \psi_{ss}(x, 0, 0) = -2$$

La jacobini è $\ddot{u} = -u$, quindi la sd. è $\sin x$ che si annulla nuovamente in π

- Per $l \leq \pi$ è minimo assoluto perché

$$F(u) = \int_0^L (\dot{u}^2 - u^2) dx$$

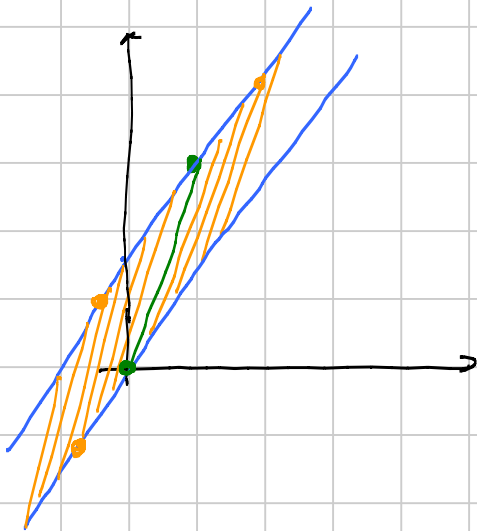
Funzionale quadratico che verifica (L^+) e (J^+) , almeno per $L < \pi$.

Oss. $F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 dx$ $u(0) = 0$ $u(1) = 3$

$$p^2 \geq 6p - 9$$

$$V(x, s) = 6s - 9x$$

Considero le linee di livello $6s - 9x = \lambda$ $s = \frac{3}{2}x + \frac{\lambda}{6}$



Posso concludere che $u_0(x) \equiv 3x$ minimizza tra tutte le u che hanno estremi sulle 2 rette.

In questo modo riesco a risolvere problemi ad estremi variabili