

Condizioni suff. per (SLM)

Metodo di calibrazione Cond. suff. affinché $u_0(x)$ sia minimo è che possa trovare

$$\hat{\psi}(x, s, p) = \underbrace{A(x, s)}_{V_x} + p \underbrace{B(x, s)}_{V_s}$$

tali che

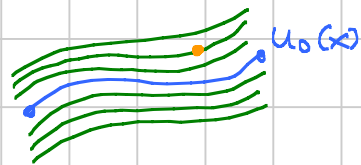
$$(i) A_s(x, s) = B_x(x, s)$$

$$(ii) \psi(x, u_0(x), \bar{u}_0(x)) = \hat{\psi}(x, u_0(x), \bar{u}_0(x)) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$(iii) \psi(x, s, p) \geq \hat{\psi}(x, s, p) \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

eventualmente con
restizioni su s, p

(F) $u_0(x)$ fa parte di una famiglia di soluzioni di (E)



Fatto 1 Supponiamo che valga (F). Poniamo

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x, s, p) &= \psi(x, s, p(x, s)) + (p - p(x, s)) \psi_p(x, s, p(x, s)) \\ &= \underbrace{p \psi_p(x, s, p(x, s))}_B + \underbrace{\psi(x, s, p(x, s)) - p(\dots) \psi_p(\dots)}_A \end{aligned}$$

Abbiamo visto che $B_x = A_s$, il che vuol dire che (i) è ok.

[$p(x, s)$ = derivata della curva che passa per (x, s)]

Fatto 2 La $\hat{\psi}$ definita sopra verifica (ii), basta sostituire $u_0(x)$ e ricordarsi che

$$p(x, u_0(x)) = \bar{u}_0(x)$$

Fatto 3 La condizione (iii) è equivalente a dire che

$$E(x, s, p(x, s), p) \geq 0$$

per definizione di eccesso.

Quindi se vale (W^+) vale la (iii) più di considerare un intorno piccolo a suff. di $u_0(x)$

Nota bene : bastano (i) e (ii) per concludere che

$$F(u) - F(u_0) = \int_a^b E(x, \overset{\substack{\uparrow \\ \text{vicino a } u_0(x)}}{u(x)}, \overset{\substack{\uparrow \\ \text{vicino a } u_0(x)}}{p(x, u(x))}, \overset{\substack{\uparrow \\ \text{dove gli piace}}}{\dot{u}(x)}) dx$$

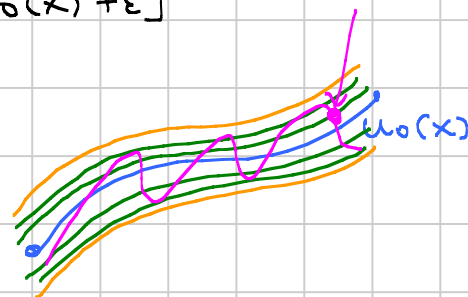
$$(W^+) \quad E(x, s, p, q) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\forall s \in [u_0(x) - \varepsilon, u_0(x) + \varepsilon]$$

$$\forall p \in [\dot{u}_0(x) - \varepsilon, \dot{u}_0(x) + \varepsilon]$$

$$\forall q \in \mathbb{R}$$

$$\dot{u}(x) \in \mathbb{R}$$



Punto essenziale

- $u(x)$ è vicino a $u_0(x)$ per definizione
- $p(x, u(x))$ è vicino a $p(x, u_0(x))$ volendo per continuità di $p(x, s)$. Occhio $p(x, s)$ non ha nulla a che fare con $\dot{u}(x)$

$$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \quad b$$

$$\text{Fatto 1} + \text{Fatto 2} \Rightarrow F(u) - F(u_0) = \int_a^b E(\dots)$$

Come lo abbiamo fatto è l'approccio **ALLA HILBERT**

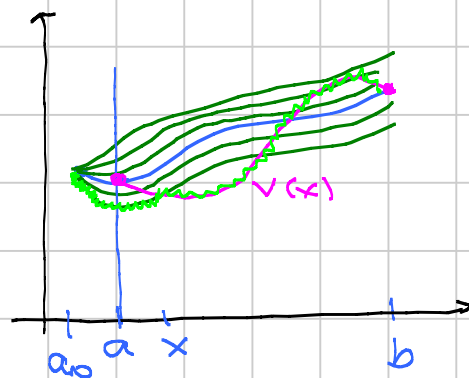
In alternativa si può dimostrare **ALLA WEIERSTRASS**

$$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$$

Caso semplificato: tutte le soluzioni della famiglia (F) passano per uno stesso p.to (a_0, A_0) con $a_0 < A$

Fissato $x \in [a, b]$ considero la curva

$v(t)$ per $t \geq x$
 famiglia per $t \in [a_0, x)$
 $\uparrow u(\varepsilon, t) = u(\varepsilon(x), t)$



Pongo

$$\begin{aligned} \varphi(x) := & \int_{a_0}^x \psi(t, u(\varepsilon(x), t), u_t(\varepsilon(x), t)) \, dx \\ & + \int_x^b \psi(t, v(t), \dot{v}(t)) \, dt \end{aligned}$$

(dx)
 dt, of course
 (corretto dopo video)

Calcolo

$$\varphi(b) = \int_{a_0}^b \psi(t, u_0(t), \dot{u}_0(t)) \, dt$$

$$\varphi(a) = \int_{a_0}^a \psi(t, u_0(t), \dot{u}_0(t)) \, dt + \int_a^b \psi(t, v(t), \dot{v}(t)) \, dt$$

quindi

$$\varphi(a) - \varphi(b) = F(v) - F(u_0)$$

se fosse $\geq 0 \dots \text{☺}$

Spero che $\varphi(x)$ sia decrescente. Ora con tanta pazienza

$$\varphi'(x) = -E(x, v(x), p(x, v(x)), \dot{v}(x))$$

Calcolo qualche pezzo

La derivata del 2° integrale è

$$- \psi(x, s, q)$$

$$- \psi(x, v(x), \dot{v}(x))$$

La derivata del 1° integrale ha vari pezzi

$$\psi(x, u(\varepsilon(x), x), u_t(\varepsilon(x), x)) = \psi(x, v(x), p(x, v(x)))$$

Il termine difficile è

$$\int_{a_0}^x \frac{d}{dx} \psi(t, u(\varepsilon(x), t), u_t(\varepsilon(x), t)) dt$$

↖ dopo video
↑ dopo video OK ↑ integrando per parti

$$= \int_{a_0}^x [\underbrace{\psi_s(\dots) u_\varepsilon(\varepsilon(x), t) \varepsilon_x(x)}_{\text{OK}} + \underbrace{\psi_p(\dots) u_{\varepsilon t}(\varepsilon(x), t) \varepsilon_x(x)}_{\text{integrando per parti}}] dt$$

Il termine integrale se ne va per Eulero. Resta il termine di bordo

$$\left[\psi_p(t, u(\varepsilon(x), t), u_t(\varepsilon(x), t)) \varepsilon_x(x) u_\varepsilon(\varepsilon(x), t) \right]_{t=a_0}^{t=x}$$

Quando metto $t=a_0$ se ne va il termine con u_ε .

Quando metto $t=x$ mi ritrovo

$$\psi_p(x, v(x), p(x, v(x))) \boxed{\varepsilon_x(x) u_\varepsilon(\varepsilon(x), x)}$$

Ora ricordo che $u(\varepsilon(x), x) = v(x)$ quindi derivando

$$u_\varepsilon(\varepsilon(x), x) \varepsilon_x(x) + u_t(\varepsilon(x), x) = \dot{v}(x)$$

quindi $u_\varepsilon(\varepsilon(x), x) \varepsilon_x(x) = \dot{v}(x) - p(x, u(x))$

$v(x)$ coincide: aggiungi dopo video
" "

quindi abbiamo ricostruito l'eccesso.

— o — o —

$$(F) \Rightarrow F(u) - F(u_0) = \int \text{Eccesso}$$

↑
ci si arriva o calibrando o alla Weierstrass.

Resta da fare $(E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow (F)$