

Altri due esempi di calibrazione

Cond. sufficiente  $(L^+) + (J^+) \Rightarrow$  funzionale quadratico  $\geq 0$

$$\psi(x, s, p) = A(x) s^2 + 2B(x) sp + C(x) p^2$$

$$V(x, s) = -z(x) s^2 \text{ da cui } \hat{\psi}(x, s, p) = V_x + V_s p = -z'(x) s^2 - 2s z(x) p$$

Quindi la (i) diventa  $(A(x) + z'(x)) s^2 + 2(B(x) + z(x)) sp + C(x) p^2$   
e se voglio che sia  $\geq 0$  per ogni  $s, p, x$  mi ritrovo che la forma

$$\begin{pmatrix} A(x) + z'(x) & B(x) + z(x) \\ B(x) + z(x) & C(x) \end{pmatrix} \text{ deve essere semidef. pos. , il che porta alla cond. (z).}$$

Supponiamo  $\psi(x, s, p)$  convessa nella coppia  $s, p$  per ogni  $x \in [a, b]$   
Allora la dim. classica passava per

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x, u(x), \dot{u}(x)) dx &\geq \int_a^b \psi(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx + \\ &+ \int_a^b (u(x) - u_0(x)) \psi_s(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx \\ &+ \int_a^b (\dot{u}(x) - \dot{u}_0(x)) \psi_p(\dots) dx \end{aligned}$$

Lo si può interpretare pensando

$$\hat{\psi}(x, s, p) = \psi(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) + (s - u_0(x)) \psi_s(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) + (p - \dot{u}_0(x)) \psi_p(\dots)$$

$$= p \underbrace{\psi_p(\dots)}_{V_s} + \underbrace{\psi(\dots)}_{V_x} + (s - u_0(x)) \psi_s(\dots) - \dot{u}_0(x) \psi_p(\dots)$$

L'esistenza di  $V(x,s)$  è immediata se verifico che  $A_x = B_s$

$$A_x = \frac{d}{dx} [\psi_p(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))] \quad B_s = \psi_s(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$$

Se  $u_0(x)$  risolve (E), allora  $A_x = B_s$  e  $V$  esiste.  
— o — o —

CONDIZIONE SUFFICIENTE DI WEIERSTRASS

Ricordo la def. di eccesso di Weierstrass

$$E(x, s, p, q) = \psi(x, s, q) - \psi(x, s, p) - (q-p)\psi_p(x, s, p)$$

(W) Una funzione  $u_0(x)$  verifica (W) se

$$E(x, u_0(x), \dot{u}_0(x), q) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \forall q \in \mathbb{R}$$

(W<sup>+</sup>)  $\exists \varepsilon > 0$  tale che

$$E(x, s, p, q) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \forall q \in \mathbb{R}, \forall s \in [u_0(x) - \varepsilon, u_0(x) + \varepsilon] \\ \forall p \in [\dot{u}_0(x) - \varepsilon, \dot{u}_0(x) + \varepsilon]$$

COND. NEC.  $u_0(x)$  e (SLM)  $\Rightarrow$  (W)

COND. SUFF. (E) + (L<sup>+</sup>) + (J<sup>+</sup>) + (W<sup>+</sup>)  $\Rightarrow$  (SLM)

Road map della dim

$$\textcircled{1} (E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow (F)$$

$$\textcircled{2} (F) + (W^+) \Rightarrow (SLM)$$

↑  
IMBEDDING  
THEOREM

(F) sta per FIELD

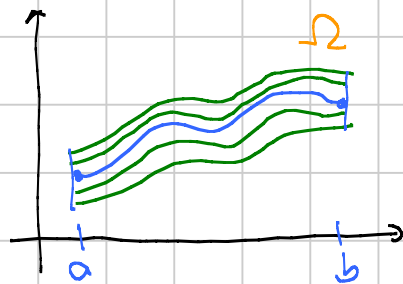
(F) Si dice che  $u_0(x)$  verifica (F) se  $u_0(x)$  si può immergere in una famiglia di soluzioni di  $E$ .  
 Detto meglio, esiste una funzione

$$u: [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad u(\varepsilon, x)$$

abbastanza regolare ( $C^2$  basta)

tale che

- $u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [a, b]$
- per ogni  $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$  la funzione  $x \rightarrow u(\varepsilon, x)$  risolve  $(E)$
- per ogni  $x \in [a, b]$  la funzione  $\varepsilon \rightarrow u(\varepsilon, x)$  è strett. cresc.



Notazione Indichiamo con  $\Omega$  l'immagine di  $u$ , cioè la zona di piano ricoperta dalla famiglia.  
 Per ogni  $(x, s) \in \Omega$  esiste un'unica soluzione di Eulero nella nostra famiglia che passa per  $(x, s)$ . Si pone

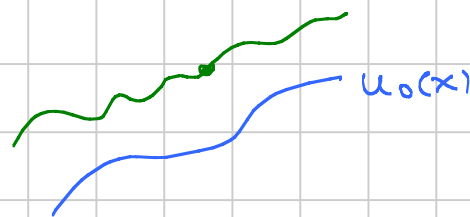
$$p(x, s) = u_x(\varepsilon, x)$$

$$s = u(\varepsilon, x)$$

↑ è la derivata della funzione che passa per  $(x, s)$

In particolare

$$u_x(\varepsilon, x) = p(x, u(\varepsilon, x))$$



Da qui ricavo

$$u_{xx}(\varepsilon, x) = p_x(x, u(\varepsilon, x)) + p_s(x, u(\varepsilon, x)) \cdot \underbrace{u_x(\varepsilon, x)}_{p(x, s)}$$

quindi

$$u_{xx} = p_x + p p_s$$

Back to analisi 2

$$y' = f(t, y) \leadsto y'' = f_t(t, y) + f_y f$$
$$\leadsto y'' = f_t + f_y f$$

Quella sopra è la stessa.

Cosa diventa l'equazione di Eulero usando la  $p(x, s)$

$$\frac{d}{dx} \psi_p(x, u(\varepsilon, x), u_x(\varepsilon, x)) = \psi_s(x, u(\varepsilon, x), u_x(\varepsilon, x))$$

$$\psi_{px}(x, u(\varepsilon, x), u_x(\varepsilon, x)) + \psi_{ps}(\dots) u_x(\varepsilon, x) + \psi_{pp}(\dots) u_{xx} = \psi_s(\dots)$$

$$\underbrace{\psi_{px}(x, s, p(x, s))}_{=0} + \underbrace{\psi_{ps}(\dots)}_{=0} \underbrace{p_x + p s}_{=0} + \psi_{pp}(\dots) (p_x + p s) = \psi_s(\dots)$$

Fatto generale Se vale (F), allora

$$F(u) - F(u_0) = \int_a^b E(x, u(x), p(x, u(x)), u'(x)) dx$$

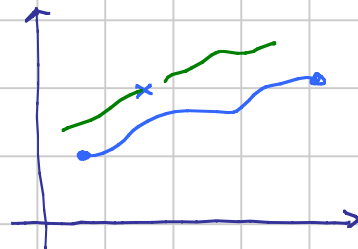
Se è vero il fatto generale e vale (w<sup>+</sup>), allora  $F(u) - F(u_0) \geq 0$  per ogni  $u$  che sta nella zona in cui  $E \geq 0$ .

Dim. Voglio calibrare usando l'eccesso, cioè spero che

$$\psi(x, s, p) \geq \hat{\psi}(x, s, p) = \psi(x, s, p(x, s)) + (p - p(x, s)) \psi_p(x, s, p(x, s))$$

Spero che  $\hat{\psi}$  sia del tipo  $V_x + p V_s$

$$\hat{\psi}(x, s, p) = \underbrace{p \psi_p(x, s, p(x, s))}_{A} + \underbrace{(\psi(x, s, p(x, s)) - p(x, s) \psi_p(x, s, p(x, s)))}_{B}$$



Mi serve  $A_x = B_s$ , cioè

$$\psi_{px}(x, s, p(x, s)) + \psi_{pp}(\dots) p_x(x, s) = \psi_s(\dots) + \cancel{\psi_p p_s} - \cancel{p s \psi_p} - p \psi_{ps} - p \psi_{pp} p_s$$
$$\psi_{px}(\dots) + \psi_{ps} p + \psi_{pp} (p_x + p p_s) = \psi_s(\dots)$$