

[ Se c'è un idiota in mezzo ad una folla non se ne accorge nessuno, ma se c'è un intero gruppo di idioti, questi si fanno notare benissimo.  
(Liberamente tratto da) E. De Giorgi ]

## CALIBRAZIONE (calibration, verification function)

Esempio motivazionale  $\min \left\{ \int_0^1 \dot{u}^2 dx : u(0)=0, u(1)=3 \right\}$

L'unico pto di min. è  $u_0(x) = 3x$ .  
Come lo dimostro?

$$p^2 \geq 6p - 9 \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

$\uparrow \psi(x,s,p)$        $\uparrow \hat{\psi}(x,s,p)$

$$\int_0^1 \dot{u}^2 dx \geq \int_0^1 (6\dot{u} - 9) dx$$

$$= 6[u(x)]_0^1 - 9 = 18 - 9 = 9$$

$F(u_0)$

Ho così dimostrato che

$F(u) \geq F(u_0) \quad \forall u$  ammissibile e vale il segno di = se e solo se vale nella  $p^2 \geq 6p - 9$ , cioè  $\Leftrightarrow$   
 $\dot{u}(x) = 3$  per ogni  $x$

Altro esempio: scelgo un parametro  $a > 0$  e pongo

$$p^2 \geq 2 \frac{s+3a}{x+a} p - \frac{(s+3a)^2}{(x+a)^2} \quad \forall p \in \mathbb{R} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \forall x \geq 0$$

$\uparrow \psi(x,s,p)$        $\uparrow \hat{\psi}(x,s,p)$

$$F(u) = \int_0^1 \dot{u}^2 dx \geq \int_0^1 2 \frac{u(x)+3a}{x+a} \dot{u}(x) - \frac{(u(x)+3a)^2}{(x+a)^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dx} \left[ \frac{(u(x)+3a)^2}{x+a} \right] dx = \frac{(3+3a)^2}{1+a} - \frac{(3a)^2}{a}$$

$$= 9(1+a) - 9a = 9 = F(u_0)$$

Inoltre vale il segno di  $=$  se e solo se  $u(x) = \frac{u(x)+3a}{x+a}$   
 che ha come soluzione per  $(0,0)$  proprio  
 $u_0(x) = 3x$ .

Osservazione la prima scelta  $6p-9$  è il lim della 2<sup>a</sup> per  $a \rightarrow +\infty$ .  
 Facendo il limite per  $a \rightarrow 0$  ne otterremmo ancora  
 un'altra

$$p^2 \geq 2 \frac{s}{x} p - \frac{s^2}{x^2} \quad (\text{verifica per esercizio: coinvolge un integrale potenzialmente improprio}).$$

— 0 — 0 —

Quali  $\hat{\psi}(x, s, p)$  permettono di fare bene la primitiva?

Possibilità: prendo  $V(x, s)$  di classe  $C^1$  e pongo

$$\hat{\psi}(x, s, p) := V_x(x, s) + V_s(x, s)p$$

è l'integrale della  
 formula  $V_x dx + V_s ds$   
 lungo il grafico

$$\begin{aligned} \int_a^b \hat{\psi}(x, u(x), u'(x)) dx &= \int_a^b [V_x(x, u(x)) + V_s(x, u(x)) u'(x)] dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} [V(x, u(x))] dx \\ &= V(b, u(b)) - V(a, u(a)) \end{aligned}$$

Sorpresona!  $\hat{F}(u) = \int_a^b \hat{\psi}(x, u, u') dx$  dipende solo dai valori di  $u$   
 agli estremi

Metodo di calibrazione Data  $u_0(x)$  candidato minimo per  $F(u)$   
 cerco una funzione  $V(x, s)$  tale che la  $\hat{\psi}$  ottenuta come sopra  
 verifichi due proprietà

(i)  $\psi(x, s, p) \geq \hat{\psi}(x, s, p)$  per ogni  $x \in [a, b]$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}$

(ii)  $\psi(x, u_0(x), u_0'(x)) = \hat{\psi}(x, u_0(x), u_0'(x))$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

Se ci riesco, allora

$$F(u_0) = \min \{ F(u) : u(a) = A, u(b) = B \}$$

**Dim.**  $F(u) = \int_a^b \psi(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$

(i)  $\rightarrow \geq \int_a^b \hat{\psi}(x, u(x), \dot{u}(x)) dx$  (dipende solo dagli estremi, quindi lo calcolo con  $u_0(x)$ )  
 $= \int_a^b \hat{\psi}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx$

(ii)  $\rightarrow = \int_a^b \psi(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx = F(u_0)$

(Sostanzialmente è il lemma trivial di una volta)  
 — o — o —

Domanda: come posso fare per costruire  $V(x, s)$ ?

**VALUE FUNCTION** Supponiamo wlog che  $V(a, A) = 0$ .

Quanto deve valere  $V(b, B)$ ? Il minimo del funzionale con quei dati al bordo!

Pongo  $V(x_0, s_0) := \min \left\{ \int_a^{x_0} \psi(t, u(t), \dot{u}(t)) dt : u(a) = A, u(x_0) = s_0 \right\}$   
 $\uparrow$  posto che esista

**Teorema** Se per caso fosse  $V \in C^1$ , allora  $V$  è una calibratore possibile.

Utilizzo pratico: voglio dimostrare che  $u_0(x)$  è minimo con dati  $(a, A), (b, B)$ .

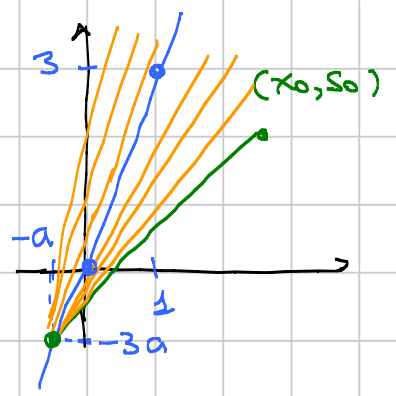
Mi sento smart e penso di saper risolvere con ogni coppia di dati  $(a, A), (x_0, s_0)$ .

Usando le presunte soluzioni calcolo  $V$  e verifico a mano a posteriori (i) e (ii).

Se funziona ho vinto.

Esempio  $\int_0^1 u^2 dx$

Uso come pto base  $(-a, -3a)$ . Chi è il minimo con dati  $(-a, -3a)$  e  $(x_0, s_0)$ ?



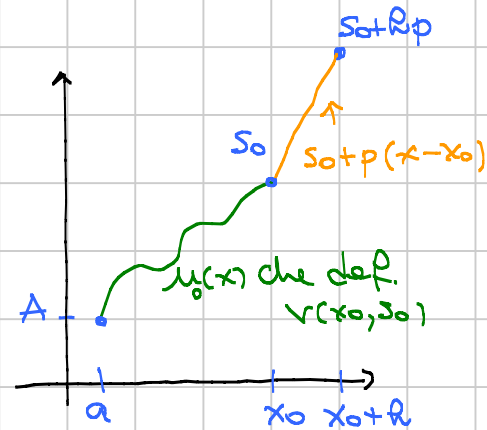
$$\underbrace{\left(\frac{s_0+3a}{x_0+a}\right)^2}_{u^2} \cdot \underbrace{(x_0+a)}_{\text{integrato tra } -a \text{ e } x_0} = \frac{(s_0+3a)^2}{x_0+a}$$

Congettura :  $V(x, s) := \frac{(s+3a)^2}{x+a}$

$$\hat{\psi}(x, s, p) = V_x(x, s) + V_s(x, s) p = -\frac{(s+3a)^2}{(x+a)^2} + 2 \frac{(s+3a)}{x+a} p$$

Dim. teorema Supponiamo  $V(x, s) \in C^1$ . Devo dimostrare che valgono (i) e (ii).

$$\begin{aligned} V(x_0+h, s_0+Rp) &\leq \text{lo calcolo su una retta} \\ &\leq V(x_0, s_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \psi(x, s_0+p(x-x_0), p) dx \end{aligned}$$



divido per  $h$  e riorganizzo

$$\frac{V(x_0+h, s_0+Rp) - V(x_0, s_0)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \psi(x, s_0+p(x-x_0), p) dx$$

Faccio il limite per  $h \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \frac{V_x(x_0, s_0) + V_s(x_0, s_0) p}{\hat{\psi}(x_0, s_0, p)} &\leq \psi(x_0, s_0, p) \\ &\leq \psi(x_0, s_0, p) \end{aligned}$$

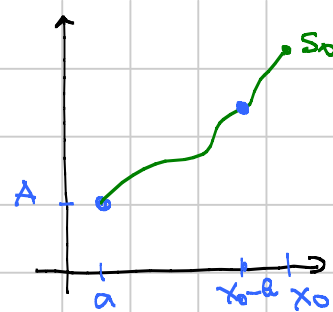
Questo dimostra la (i).

Per dimostrare la (ii) uso  $x_0$  e  $x_0-h$

Chi è  $V(x_0 - R, u_0(x_0 - R))$ ?

È ottenuto dalla stessa  $u_0(x)$ , altrimenti  
potrei risparmiare nel 1° tratto.

Quindi



$$V(x_0, u_0(x_0)) - V(x_0 - R, u_0(x_0 - R)) = \int_{x_0 - R}^{x_0} \psi(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx$$

Divido per  $R$  e passo al limite

$$V_x(x_0, u(x_0)) + V_S(x_0, u(x_0)) \dot{u}(x_0) = \psi(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))$$

Questa è la (11).

— o — o —