

Dim di ③ Ipotesi: esiste sol. di $z' = \frac{[z+B]^2}{C} - A$

Tesi: $Q(v) \geq 0$ per ogni $v \in C_c^\infty(a, b)$

Consideriamo, data una qualunque $z(x)$, la forma

$$\hat{Q}(v) = Q(v) + \underbrace{\int_a^b [z(x) v^2(x)]' dx}_{= 0 \text{ se } v \text{ è nulla agli estremi}}$$

Osservando che $[z(x) v^2(x)]' = z'(x) v^2(x) + 2 z(x) v(x) v'(x)$
quindi

$$\hat{Q}(v) = \int_a^b \{ [A(x) + z'] v^2 + 2 [B(x) + z] v v' + C(x) v'^2 \} dx$$

Se $\hat{Q}(v)$ soddisfa la mega-sufficiente ho finito perché

$$Q(v) = \hat{Q}(v) \geq 0$$

$\uparrow$ se v è nulla al bordo $\uparrow$ per ogni v

Ma la mega-suff. su $\hat{Q}$ è

$$[A(x) + z'(x)] [C(x)] \geq [B(x) + z(x)]^2$$

Se riesco a trovare una $z(x)$ che verifica l'uguaglianza,
ancora meglio

$$A(x) + z' = \frac{[z+B(x)]^2}{C}$$

Porto $A(x)$ al RHS e ho l'eq. per z .

— 0 — 0 —

Primo passo avanti Nelle ipotesi della cond. suff. esiste $\varepsilon_0 > 0$ t.c.

$$Q(u) \geq \varepsilon_0 \int_a^b \dot{u}^2(x) dx \quad \forall u \in \dots$$

Dim.: Considero la forma differenziale

$$Q_\varepsilon(u) = Q(u) - \varepsilon \int_a^b \dot{u}^2 dx = \int_a^b A(x) u^2 + 2B(x) u \tilde{u} + (C(x) - \varepsilon) \tilde{u}^2$$

Se Q verifica (L^+) , allora anche Q_ε verifica (L^+) per $\varepsilon > 0$ piccoli

Se Q verifica (J^+) , " " " " (J^+) " " "
 (J^{++}) (J^{++})

Questo segue dalla dipendenza continua delle soluzioni di (JDE) dai coefficienti. La dipendenza continua è uniforme

$$\ddot{u}_\varepsilon = a_\varepsilon(x) \dot{u}_\varepsilon + b_\varepsilon(x) u_\varepsilon \quad \begin{array}{l} a_\varepsilon \rightarrow a_0 \\ b_\varepsilon \rightarrow b_0 \text{ unif} \end{array}$$

allora $u_\varepsilon \rightarrow u_0$

Quindi $Q_\varepsilon(u) \geq 0$ per ogni u per ε piccolo, da cui la tesi.

Secondo passo avanti Data $Q(u)$ esiste M t.c.

$$|Q(u)| \leq M \int_a^b \dot{u}^2 dx \quad \forall u \in C_c^\infty(a,b)$$

Idea della dim. $\int_a^b C(x) \dot{u}^2(x) dx \leq \max_{x \in [a,b]} |C(x)| \int_a^b \dot{u}^2(x) dx$

$$\int_a^b A(x) u^2(x) dx \leq \max_{x \in [a,b]} |A(x)| \int_a^b u^2(x) dx \quad \text{Usando le "solite"}$$

stime $|v(x)| \leq \underbrace{v(a)}_0 + \left| \int_a^x \tilde{v}(s) ds \right| \leq \sqrt{b-a} \left[\int_a^b \tilde{v}^2(s) ds \right]^{1/2}$

Basta ora fare i ∇ ed integrare. Idea per $B(x) v(x) \tilde{v}(x)$

$$\left| \int_a^b B(x) v(x) \dot{v}(x) dx \right| \leq \max B(x) \cdot \left| \int_a^b v(x) \dot{v}(x) dx \right|$$

e concludo con Hölder o C.S.
— o — o —

Consideriamo ora un funzionale integrale generale

$$F(u) = \int_a^b \psi(x, u, \dot{u}) dx$$

Sia $u_0(x)$ una soluzione di Eulero e consideriamo la variazione seconda

$$Q(v) = \int_a^b A v^2 + 2B v \ddot{v} + C \ddot{v}^2$$

dove $A(x) = \psi_{ss}(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$

$B(x) = \psi_{sp}(\dots)$

$C(x) = \psi_{pp}(\dots)$

Condizione necessaria Consideriamo la forma associata.

Se non verifica $Q(v) \geq 0$ per ogni $v \in C_c^\infty(a, b)$, allora $u_0(x)$ non può essere un minimo nemmeno direzionale.
Visto dall'altra parte

$$u_0 \text{ (DLH)} \Rightarrow (E) + \underbrace{(L) + [(L^+) \Rightarrow (J)]}_{\substack{\uparrow \\ \text{pensate sulla forma } Q(v) \\ \text{costruita a partire da } u_0(x)}}$$

Ricordo: u_0 è (DLH) se $\varphi_v(t) := F(u_0 + tv)$ ha minimo locale per $t=0$

[Dim. $\varphi_v''(0) = Q(v)$]

CONDIZIONE SUFFICIENTE

$$(E) + (L^+) + (J^+) \Rightarrow u_0 \in (WLM)$$

sulla forma
costruita da $u_0(x)$

Dim. Devo dim. che $F(u_0 + v) \geq F(u_0)$ se v si annulla al bordo ed è piccola in norma C^1 .

Considero

$$\varphi_v(t) := F(u_0 + tv)$$

e allora

0 se vale (E)

"

$$F(u_0 + v) = \varphi_v(1) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Taylor-Lagrange}}}{\varphi_v(0) + \varphi_v'(0) \cdot 1 + \frac{1}{2} \varphi_v''(t_0) 1^2}$$

con $t_0 \in (0,1)$

$$= F(u_0) + \frac{1}{2} \underbrace{\varphi_v''(t_0)}_{\text{se fosse } \geq 0 \text{ ho finito}}$$

Ora

$$\varphi_v''(t_0) = \int_a^b A^{t_0}(x) v^2 + 2B^{t_0}(x) v \dot{v} + C^{t_0}(x) \dot{v}^2, \text{ dove}$$

$$A^{t_0}(x) = \psi_{ss}(x, u_0(x) + t_0 v(x), \dot{u}_0(x) + t_0 \dot{v}(x))$$

$$B^{t_0}(x) = \psi_{sp} \left(\dots \right)$$

$$C^{t_0}(x) = \psi_{pp} \left(\dots \right)$$

Indichiamo questa forma con $Q^{t_0}(v)$. Indichiamo con $Q^0(v)$ la forma corrispondente a $t=0$

$$Q^{t_0}(v) = Q^0(v) + [Q^{t_0}(v) - Q^0(v)]$$

Per ipotesi Q^0 verifica (L^+) e (J^+) , quindi esiste $\varepsilon_0 > 0$ t.c.

$$Q^0(v) \geq \varepsilon_0 \int_a^b \dot{v}^2(x) dx$$

uso l'unif. continuità
di $\psi_{ss}, \psi_{sp}, \psi_{pp}$

La forma $Q^{to}(v) - Q^0(v)$ ha i coeff. A, B e C che sono piccoli a piacere se $v(x)$ e $\dot{v}(x)$ sono piccole abbastanza. Quindi se v è piccola in norma C^1 , i coeff. della forma diff. sono piccoli, quindi per il secondo passo avanti

$$|Q^{to}(v) - Q^0(v)| \leq \underbrace{\text{quello che voglio}}_{=\varepsilon_0} \int_a^b \dot{v}^2(x) dx$$

Sommando concludo che $Q^{to}(v) \geq 0$ per ogni v abb. piccola.

Esempio degli esempi

$$F(u) = \int_0^l (\dot{u}^2 - u^2) dx$$

Si vede che $Q(u) = \int_0^l \dot{u}^2 - u^2$

$$A(x) \equiv -1 \quad B(x) \equiv 0$$

$$C(x) \equiv 1 \Rightarrow (L^+) \text{ ok}$$

$$(JDE) \quad [\dot{v}]' = -v \quad \dot{v} = -v$$

risolvo con dati $v(0) = 0, \dot{v}(0) = 1$ e trovo $v(x) = \sin x$

π è il primo pto coniugato.

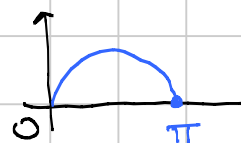
Quindi

- se $l > \pi$, allora $\text{autovalori}(J) \Rightarrow \inf = -\infty$
- se $l < \pi$, allora (J^+) è ok $\Rightarrow F(u) \geq 0$ per ogni u nulla al bordo

Se $l = \pi$, allora è ancora vero che $Q(v) \geq 0 \forall v \in \dots$

Dim Se fosse che $Q_\pi(v)$ non è ≥ 0 sempre, troverei v t.c.

$$Q_\pi(v) \leq -1000 \quad \text{per omogeneità}$$

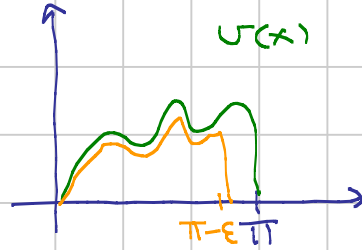


Ma allora trovarei U_ε tale che

$$Q_{\pi-\varepsilon}(U_\varepsilon) \leq -500 \quad \text{per } \varepsilon \text{ piccolo}$$

e quindi $Q_{\pi-\varepsilon}(U)$ non sarebbe semidefinita positiva

$$U_\varepsilon(x) = U\left(\frac{\pi}{\pi-\varepsilon}x\right)$$



non resta che sostituire e vedere che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} Q_{\pi-\varepsilon}(U_\varepsilon) = Q_\pi(U) \leq -1000$$

Esercizio Vedere che succede per $F(u) = \int_0^2 (u'^2 - u^2 - u^4) dx$
e vedere quando
 $u_0(x) \equiv 0$ è (WLM)