

Funzionali quadratici $Q(u) = \int_a^b [A(x) u^2 + 2B(x) u \dot{u} + C(x) \dot{u}^2] dx$

(L) $C(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$

(L⁺) $C(x) > 0$ " " $x \in [a, b]$ (quindi $C(x) \geq c_0 > 0 \forall x \in [a, b]$)

Equazione di Jacobi (JDE) = eq. di Eulero di $Q =$

$$[C(x) \ddot{u} + B(x) \dot{u}]' = B(x) \dot{u} + A(x) u$$

Se i coeff. sono regolari posso fare la derivata

$$C'(x) \dot{u} + C(x) \ddot{u} + B'(x) u + B(x) \dot{u} = B(x) \dot{u} + A(x) u$$

Se vale (L⁺) posso portarla in forma normale $\ddot{u} = \alpha(x) \dot{u} + \beta(x) u$
A questo pto si applica la teoria delle eq. diff. lineari

(J) La soluzione di (JDE) con dati iniziali $u(a) = 0, \dot{u}(a) = 1$
non si annulla in (a, b) (ma magari in b si)

(J⁺) Stessa cosa ... non si annulla in $[a, b]$

Def. Si dice pto coniugato (di a) ogni punto in cui la soluz. di sopra si annulla.

Quindi: (J) No pti coniugati in (a, b)

(J⁺) No pti coniugati in $[a, b]$

Oss. Se faccio tutto imponendo $u(a) = 0$ e $\dot{u}(a) = \alpha \neq 0$
otengo gli stessi pti coniugati (per linearità dell'equ.)

CONDIZIONE NECESSARIA Supponiamo che $Q(u) \geq 0$ per ogni $u \in C_0^\infty$

Allora

(1) Vale la cond (L)

(2) se vale (L^+) , allora vale (J)

$$Q(u) \geq 0 \quad \forall u \in \dots \Rightarrow (L) + [(L^+) \Rightarrow (J)]$$

Conseguenze in negativo

- $\text{NO } (L) \Rightarrow \sup\{Q(u) : u \in C_0^\infty(a,b)\} = -\infty$
- $(L^+) \text{ non ha } (J) \Rightarrow \neg$

CONDIZIONE SUFFICIENTE

Supponiamo che valgano (L^+) e (J^+) . Allora $Q(u) \geq 0$ per ogni...

$$(L^+) + (J^+) \Rightarrow Q(u) \geq 0 \quad \forall u \in \dots$$

CONDIZIONE MEGA-SUFFICIENTE Se vale

$$\begin{array}{ll} A(x) C(x) \geq [B(x)]^2 & \forall x \in [a,b] \\ A(x) \geq 0 & " \\ C(x) \geq 0 & " \end{array}$$

allora $Q(u) \geq 0$ addirittura per ogni u , indipendentemente dai dati al bordo.

Dim. Banale algebra lineare: la forma risulta definita positiva.
Sotto queste ipotesi

$$\begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ B(x) & C(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x) u^2(x) + 2B(x) u(x) \dot{u}(x) + C(x) \dot{u}(x)^2 \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$$

ROAD MAP PER DIM. COND. SUFFICIENTE

$$(L^+) + (J^+) \xRightarrow{\textcircled{1}} (J^{++}) \xRightarrow{\textcircled{2}} (Z) \xRightarrow{\textcircled{3}} Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in \dots$$

dove

(J^{++}) esiste una soluzione $v(x)$ di (JDE) tale che $v(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$ (quindi $v(x) \geq v_0 > 0 \quad \forall x \in [a, b]$)

(Z) esiste una funzione $z \in C^1([a, b])$ tale che risolve

$$z' = \frac{[z + B(x)]^2}{C(x)} - A(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Oss. 1 - Posso dividere per $C(x)$ grazie a (L^+)

2 - Non è ovvio che esistono sol. in tutto $[a, b]$ perché RHS è quadratico in z ~ potenziale blow-up.

Dim. ① $(L^+) + (J^+) \Rightarrow (J^{++})$.

Per ipotesi so che la sol. di (JDE) con dato iniziale $v(a) = 0, \tilde{v}(a) = 1$ non si annulla in $[a, b]$.

Provo a risolvere (JDE) con dati

$$v_\varepsilon(a) = \varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon(a) = 1.$$

Per continuità esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\tilde{v}(x) \geq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [a, c]$$

$$v(x) \geq v_0 > 0 \quad \forall x \in [c, b]$$

Per dipendenza continua dai dati iniziali

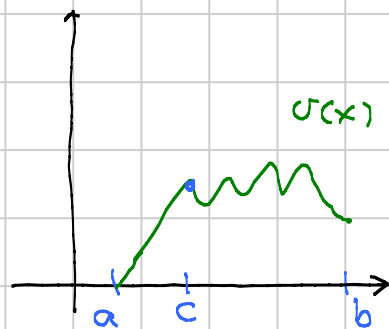
$$v_\varepsilon(x) \rightarrow v(x) \text{ unif. in } [a, b]$$

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) \rightarrow \tilde{v}(x) \quad \text{" " " "}$$

Allora per ε abbastanza piccolo si avrà

$$v_\varepsilon(x) \geq \frac{v_0}{2} > 0 \quad \forall x \in [c, b]$$

$$\tilde{v}_\varepsilon(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, c], \text{ quindi } v_\varepsilon(x) \geq v_\varepsilon(a) = \varepsilon \quad \forall x \in [a, c]$$



Qss. (domanda) Cosa succede se risolvo (JDE) con dati

$$w(b) = 0 \quad \dot{w}(b) = -1$$

Se riesco a dim. che $w(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b)$ poi basta sommare con la u data da (J⁺).

— 0 — 0 —

Dom. 2 Per ipotesi sappiamo che esiste una sol. di (JDE) $u(x)$ tale che $u(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Pongo
$$z(x) = - \frac{[C(x)\dot{u}(x) + B(x)u(x)]}{u(x)} \quad \text{LHS di (JDE)} = -C(x)\frac{\dot{u}}{u} - B(x)$$

Calcolo la derivata

$$\begin{aligned} \dot{z} &= - \frac{[C\dot{u} + Bu]'}{u} + \frac{C\dot{u} + Bu}{u^2} \dot{u} \stackrel{\text{(JDE)}}{=} - \frac{B\dot{u} + Au}{u} + C \frac{\dot{u}^2}{u^2} + B \frac{\dot{u}}{u} \\ &= -A + C \frac{\dot{u}^2}{u^2} \end{aligned}$$

Ora calcolo il RHS dell'equazione per z

$$\frac{[z+B]^2}{C} - A = \frac{1}{C} \left[-C \frac{\dot{u}}{u} \right]^2 - A = C \frac{\dot{u}^2}{u^2} - A = z' \quad \text{😊}$$

È un miracolo quello che è successo? N!

C'è sotto la teoria delle EQ. di RICCATI

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \quad \text{(RHS è pol. quadratico su } y\text{)}$$

Fatto generale : Le Riccati sono imparentate con le lineari di ordine 2

$$u'' = \alpha(x)u' + \beta(x)u$$

in questo senso

Se cerco una soluzione positiva della lineare di ordine 2 ha senso cercarla della forma $u(x) = e^{w(x)}$

Sostituisco: $\dot{v} = e^w \dot{w}$ $\ddot{v} = e^w \dot{w}^2 + e^w \ddot{w}$

$$\cancel{e^w} \dot{w}^2 + \cancel{e^w} \ddot{w} = \alpha(x) \cancel{e^w} \dot{w} + \beta(x) \cancel{e^w}$$

$$\ddot{w} = -\dot{w}^2 + \alpha(x) \dot{w} + \beta(x)$$

quindi $\dot{w}$ risolve una Riccati. Tra l'altro $w(x) = \log v(x)$
 quindi $\dot{w}$ che è la sol. della Riccati, sarebbe

$$\dot{w} = \frac{v'}{v}$$

— o — o —

Resta da fare $(z) \Rightarrow$ Tesi.