

VARIAZIONE SECONDA Calcolare $\varphi_v''(0)$

dove $\varphi_v(t) := F(u+tv) = \int_a^b \psi(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) dx$

$$\varphi_v'(t) = \int_a^b \psi_s(x, u+tv, \dot{u}+t\dot{v}) v + \psi_p(x, \dots) \dot{v} dx$$

Mettenolo $t=0$ si ottiene variazioni prima $\leadsto$ eq. Eulero

$$\varphi_v''(0) = \int_a^b [\psi_{ss}(\dots) v^2 + 2\psi_{sp}(\dots) v\dot{v} + \psi_{pp}(\dots) \dot{v}^2] dx$$

Proposizione banale $\mu_0(DLM) \Rightarrow \varphi_v''(0) \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty$
 dove si intende che tutte le derivate
 seconde $\psi_{ss}, \psi_{sp}, \psi_{pp}$ sono calcolate
 in $(x, u_0(x), \dot{u}_0(x))$

Questo motiva lo studio dei funzionali quadratici, che sono l'equivalente delle forme quadratiche.

Obiettivo: consideriamo funzionali del tipo

$$Q(v) = \int_a^b [A(x) v^2 + 2B(x) v\dot{v} + C(x) \dot{v}^2] dx$$

e cerchiamo cond. nec. e/o suff. affinché

$$Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(a,b)$$

Oss. (da gente del 2015) La condizione è equivalente a chiedere

$$Q(v) \geq 0 \quad \forall v \in H^1(a,b) \text{ nulla al bordo (basterà } C^1 \text{ a tratti)}$$

Teorema (condizione necessaria di Legendre)

Se $Q(u) \geq 0$ per ogni $u \in \dots$, allora $C(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Conseguenza: se non vale la condizione, allora la forma non è ≥ 0 .

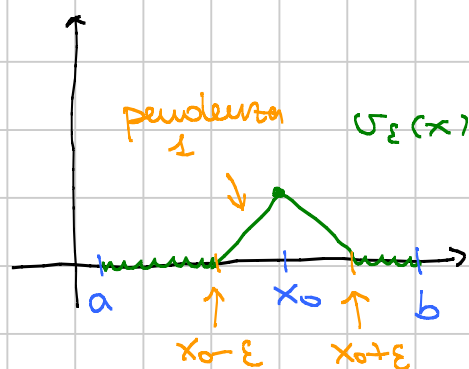
Dim. Supponendo $C(x)$ continuo, basta dimostrare che $C(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

Calcolo $Q(u_\varepsilon) =$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} A(x) u_\varepsilon^2(x) + 2B(x) u_\varepsilon(x) + C(x) dx$$

$u_\varepsilon(x) = 1$
↓

$$+ \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} A(x) u_\varepsilon^2(x) - 2B(x) u_\varepsilon(x) + C(x) dx \geq 0$$



Divido per ε e uso teo. media integrale

$$A(x_\varepsilon) u_\varepsilon^2(x_\varepsilon) + 2B(x_\varepsilon) u_\varepsilon(x_\varepsilon) + C(x_\varepsilon)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 0 0 $C(x_0)$

$$+ A(y_\varepsilon) u_\varepsilon^2(y_\varepsilon) - 2B(y_\varepsilon) u_\varepsilon(y_\varepsilon) + C(y_\varepsilon) \geq 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 $C(x_0)$

Passando al limite ottengo che $C(x_0) \geq 0$.

(Ho usato nel limite che $0 \leq u_\varepsilon(x) \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$)

(L) Un candidato minimo $u_0(x)$ verifica (L) se

$$\underbrace{\psi_{pp}(x, u_0(x), u_0'(x))}_{C(x)} \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Def. Si dice Equazione di Jacobi l'equazione LINEARE

$$[C(x)\ddot{u} + B(x)\dot{u}]' = B(x)u' + A(x)u$$

Equazione di
Eulero di Q

$$Q(u) = \int A u^2 + 2B u \dot{u} + C \dot{u}^2$$

$$[\psi_p(x, u, \dot{u})]' = \psi_s(x, u, \dot{u})$$

$$[2C\dot{u} + 2Bu]' = 2Au + 2B\dot{u}$$

Def. Consideriamo l'equazione di Jacobi con dati iniziali
 $u(a) = 0 \quad \dot{u}(a) = 1$

Dico che $x_0 \in (a, b]$ è un punto coniugato se $u(x_0) = 0$

Oss. Se mettessi $\dot{u}(a) = \neq$, la soluzione per linearità si annullava anche lei in x_0 .

Def. (L^+) $C(x) > 0$ in $[a, b]$

(J) Non esistono pti coniugati $x_0 \in (a, b)$

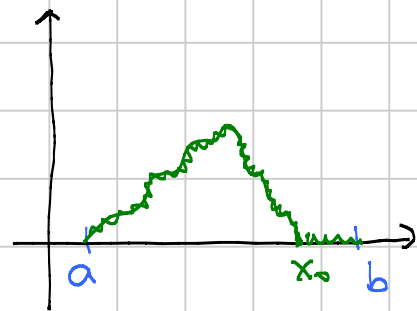
$\uparrow$
b può essere
coniugato

Teorema Consideriamo un funzionale quadratico che verifica (L^+) . Allora se $Q(u) \geq 0$ per ogni $u \in \dots$ vale anche (J)

In altre parole: se vale (L^+) la condizione (J) diventa necessaria per avere funzionale quadratico ≥ 0 .

Dico. Per ipotesi abbiamo che $Q(u) \geq 0$ sempre. Supponiamo che ci sia una solus. di jacobì che si annulla in $x_0 \in (a, b)$.

Considero la u ottenuta unendo la soluzione e poi prolungando a 0.



Dico che $Q(u) = 0$. Se lo dimostro ottengo che u è pto di minimo, ma allora u deve risolvere jacobì e non lo può fare perché tutte le soluzioni di jacobì sono C^1 e u non lo è.

Primo fatto: non può essere $u(x_0) = \dot{u}(x_0) = 0$ perché altrimenti u sarebbe identicamente nulla (esistenza ed unicità per eq. lineare)

Secondo fatto: dove serve (L^+) ? Serve per scrivere l'eq. di jacobì in forma normale (devo fare le derivate e dividere per $C(x)$): questo mi garantisce la regolarità delle soluzioni.

Terzo fatto: perché $Q(u) = 0$? Basta integrare tra a e x_0 . Partiamo dall'eq.

$$(C\ddot{u} + Bu)'u = (B\dot{u} + Au)u$$

ho moltiplicato per u

$$\int (C\ddot{u} + Bu)'u = \int B\dot{u}u + Au^2$$

integrò per parti

$$- \int C\dot{u}^2 + Bu\dot{u} = \int B\dot{u}u + Au^2$$

Portando dalla stessa parte ottengo $Q(u) = 0$