

Teoria classica del CdV.

DEFINIZIONI DI PUNTO DI MINIMO

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b \psi(x, u, u') dx}_{F(u)} : \underbrace{u(a) = A, u(b) = B}_{\text{DBC}} \right\}$$

$$\varphi_v(t) := F(u + tv)$$

$$v \in C_c^\infty((a, b))$$

$$\in C^1 \text{ con } v(a) = v(b) = 0$$

Def. Una funzione $u_0 \in C^1([a, b])$ si dice

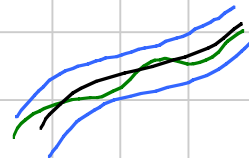
- MINIMO LOCALE DIREZIONALE (DLM) se $\varphi_v(t)$ ha minimo locale per $t=0$ per ogni v
- MINIMO LOCALE DEBOLE (WLM) se esiste un intorno di u_0 nella metrica di C^1 tale che

$$F(u) \geq F(u_0) \quad \forall u \in U$$

detto meglio, se $\exists \delta > 0$ t.c.

$$\|u - u_0\| \leq \delta \quad \|u' - u_0'\| \leq \delta \Rightarrow F(u) \geq F(u_0)$$

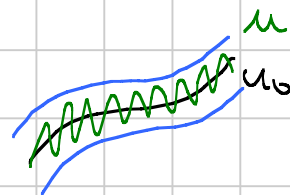
$\uparrow$ norma del sup $\uparrow$ + DBC su u



- MINIMO LOCALE FORTE (SLM) se vale la stessa cosa in intorno nella metrica C^0 , quindi

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } \|u - u_0\| \leq \delta \Rightarrow F(u) \geq F(u_0)$$

+ DBC su u



- MINIMO GLOBALE (GM) se $F(u) \geq F(u_0)$ per ogni u ammissibile.

Proposizione (banale)

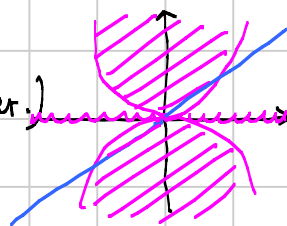
$$(GM) \Rightarrow (SLM) \Rightarrow (WLM) \Rightarrow (DLM)$$

Non vale nessuna delle implicazioni inverse

$(SLM) \not\Rightarrow (GM)$: facili controesempi di analisi 1

$(DLM) \not\Rightarrow (WLC)$: facili controesempi di analisi 2

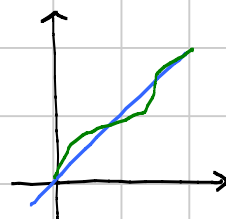
$f(x,y) = 1$ nella zona rosa (asse x + dentro par.)
o altrimenti



$(WLM) \Rightarrow (SLM)$ Esempio classico

$$\min \left\{ \int_0^1 u^3 dx : u(0) = 0, u(1) = 1 \right\}$$

Dico che $u_0(x) = x$ è (WLM) ma non (SLM)



Dim $\rightarrow$ Dico che è (WLM) perché ogni $u(x)$ con $u(x) \geq 0$ sempre ha funzionale $F(u) \geq F(u_0)$. Perché?

Trucco : considero

$$\hat{\psi}(p) := |p|^3$$

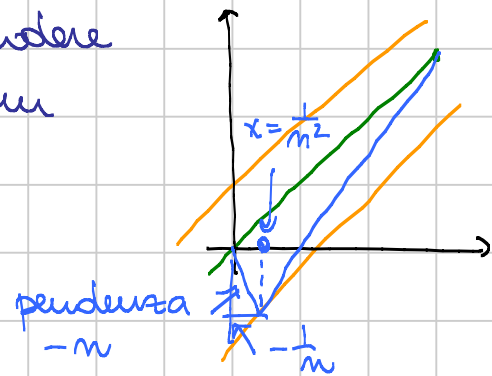
questa è convessa e coincide con $\psi(p) = p^3$ per ogni $p \geq 0$. È facile verificare che $u_0(x) = x$ è l'unico minimo globale di

$$\int_0^1 \hat{\psi}(u) dx$$

(risolve Eulero + convessità). Ma se $u(x) \geq 0 \forall x$ allora

$$\int_0^1 \psi(u) dx \stackrel{u \geq 0}{=} \int_0^1 \hat{\psi}(u) dx \stackrel{u_0 \text{ min}}{\geq} \int_0^1 \hat{\psi}(u_0) dx \stackrel{\hat{\psi}(1) = \psi(1)}{=} \int_0^1 \psi(u_0) dx$$

→ Dico che non è (SLM) perché posso scendere
ben sotto $F(u_0)$ pur rimanendo in un
intorno C^0



In figura tengo pendenza $-n$ su
un tratto lungo $\frac{1}{n^2}$.

Nell'integrale ho un $(-n)^3 \cdot \frac{1}{n^2} = -n$
e mi sono mosso in
verticale solo di $\frac{1}{n}$

Q35 Nell'esempio, l'inf di $F(u)$ in ogni intorno C^0 di u_0
vale $-\infty$.

— o — o —

Programma Determinare condizioni necessarie e/o suff.
per essere (SLM) o (WLM)

Ci sono varie condizioni:

(E)		EULERO (Eulero-Lagrange)
(L)	(L^+)	LEGENDRE (~1780)
(J)	(J^+) (J^{++})	JACOBI (~1830)
(W)	(W^+) (W_{loc})	WEIERSTRASS (~1880)
(F)		FIELD

— o — o —

ECCESSO DI WEIERSTRASS Data $\psi(x, s, p)$ si pone

$$E(x, s, p, q) := \psi(x, s, q) - \psi(x, s, p) - (q - p) \psi_p(x, s, p)$$

Caso speciale: $\psi(x, s, p) = f(p) + g(x, s)$. In questo caso

$$E(x, s, p, q) = f(q) + g(x, s) - f(p) - g(x, s) - (q - p) f'(p)$$

Nel caso speciale $E(x, s, p, q) \geq 0$ sempre è come dire che p è convessa

Oss. Se $\psi(x, s, p)$ è convessa in p per ogni (x, s) , allora $E(x, s, p, q) \geq 0$ ovunque definito.

Condizione (W) Si dice che $u_0(x)$ soddisfa (W) se

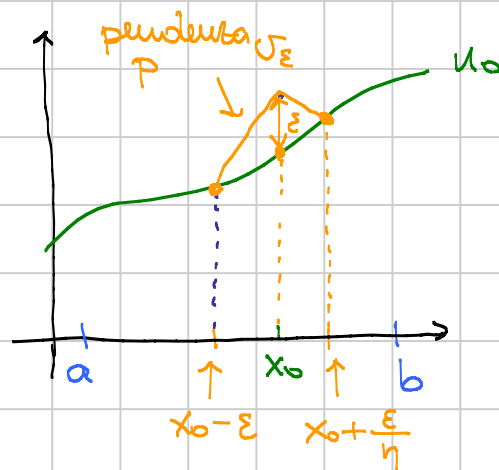
$$E(x, u(x), \dot{u}(x), p) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

Teorema Se u_0 è (SLM) per un funzionale con DBC, allora $u_0(x)$ verifica (W).

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$

Fisso $p \in \mathbb{R}$ [Aggiunto dopo video: NOTAZIONE ORRIBILE: questo p è quello che si chiamava q nell'eccesso]

Considero $v_\varepsilon(x)$ che coincide con $u_0(x)$ fuori dall'intervallo $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}]$ e che ha pendenza p in $[x_0 - \varepsilon, x_0]$



Imponiamo che $F(v_\varepsilon) \geq F(u_0)$ cioè $F(v_\varepsilon) - F(u_0) \geq 0$.

Restano solo i termini nell'intervallo

$$\begin{aligned} & \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} \psi(x, v_\varepsilon(x), p) dx - \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0} \psi(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx + \\ & + \int_{x_0}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}} \psi(x, v_\varepsilon(x), \dot{v}_\varepsilon(x)) dx - \int_{x_0}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}} \psi(x, u_0(x), \dot{u}_0(x)) dx \geq 0 \end{aligned}$$

Divido tutto per ε e uso il teorema della media integrale
I quattro pezzi diventano

$$\psi(x_\varepsilon, u_\varepsilon(x_\varepsilon), p) - \psi(y_\varepsilon, u_0(y_\varepsilon), \dot{u}_0(y_\varepsilon))$$

$$+ \frac{1}{\eta} \psi(z_\varepsilon, u_\varepsilon(z_\varepsilon), \dot{u}_\varepsilon(z_\varepsilon)) - \frac{1}{\eta} \psi(w_\varepsilon, u_0(w_\varepsilon), \dot{u}_0(w_\varepsilon)) \geq 0$$

Ora η sta fisso e $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (garantisce $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}] \subseteq (a, b)$)

Tutti i punti tendono ad x_0 e quindi ho

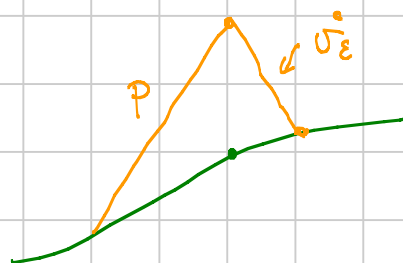
$$\psi(x_0, u_0(x_0), p) - \psi(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))$$

$$+ \frac{1}{\eta} [\psi(x_0, u_0(x_0), p) - \psi(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0))] \geq 0$$

$\eta(\dot{u}_0(x_0) - p) + \dot{u}_0(x_0)$

Bisogna capire il limite di $\dot{u}_\varepsilon(z_\varepsilon)$

Nel tratto discendente



$$\begin{aligned} \dot{u}_\varepsilon(x) &= \frac{-u_\varepsilon(x_0) + u_\varepsilon(x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta})}{\frac{\varepsilon}{\eta}} \\ &= \frac{-\overset{u_0}{u}_\varepsilon(x_0 - \varepsilon) - p\varepsilon + \overset{u_0}{u}_\varepsilon(x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta})}{\frac{\varepsilon}{\eta}} \end{aligned}$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $\dot{u}_\varepsilon(x) \rightarrow -\eta p + \dot{u}_0(x_0)(1 + \eta)$

Quando faccio il limite per $\eta \rightarrow 0$ viene

$$(p - \dot{u}_0(x)) \psi_p(x_0, u_0(x_0), \dot{u}_0(x_0)).$$

Mettendolo insieme i 4 termini si ha la condizione (w).

$$u_0(x_0 + \frac{\varepsilon}{\eta}) - u_0(x_0 - \varepsilon) = \cancel{u_0(x_0)} + \frac{\varepsilon}{\eta} \dot{u}_0(x_0) - \cancel{u_0(x_0)} + \varepsilon \dot{u}_0(x_0)$$

Dividendo per ε trovo $(\frac{1}{\eta} + 1) \dot{u}_0(x_0)$