

GAMMA CONVERGENZA E MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Enunciato Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\delta > 0$, sia

$$f : \overline{B}_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

(funzione da minimizzare)

e siano

$$\phi_i : \overline{B}_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{eq. del vincolo}) \quad i=1, \dots, k$$

Sia

$$V = \{x \in \overline{B}_\delta(x_0) : \phi_1(x) = \dots = \phi_k(x) = 0\}$$

Sia x_0 pto di minimo di f ristretta a V , cioè

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in V$$

Supponiamo f e le ϕ_i diff. in $\overline{B}_\delta(x_0)$ e C^1 .

Allora vale una delle due alternative

→ $\nabla \phi_1(x_0), \dots, \nabla \phi_k(x_0)$ sono lin. dip.

→ $\nabla f(x_0)$ è comb. lin. di $\nabla \phi_1(x_0), \dots, \nabla \phi_k(x_0)$, cioè

$$\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla \phi_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla \phi_k(x_0).$$

Dim. 1° passo La tesi equivale a dire che la matrice con colonne (o righe) $\nabla f, \nabla \phi_1, \dots, \nabla \phi_k$ ha rango $\leq k$.

2° passo Posso supporre wlog che x_0 sia pto di min. stretto, cioè

$$f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}.$$

Basta infatti considerare

$$\hat{f}(x) = f(x) + |x - x_0|^2$$

e osservare che $\hat{f}(x)$ ha minimo stretto in x_0 e $\nabla \hat{f}(x_0) = \nabla f(x_0)$.

3° passo Problema con penalizzazione del vincolo. Pongo

$$F_m(x) := f(x) + m \Phi_1^2(x) + \dots + m \Phi_k^2(x)$$

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha che $F_m(x)$ ammette minimo in $\overline{B}_\delta(x_0)$ per Weierstrass. Sia x_m un qualunque p.to di minimo di $F_m(x)$.

Dico che

$$x_m \rightarrow x_0.$$

Se riesco a dimostrarlo, allora per m grande $x_m \in \overset{\text{aperta}}{B}_\delta(x_0)$,
ma allora è p.to stat. interno, ma allora

$$\nabla F_m(x_m) = 0 \quad \text{cioè} \quad \nabla f(x_m) + 2m \Phi_1(x_m) \nabla \Phi_1(x_m) + \dots = 0$$

Ora evito la tentazione di passare al limite, ma osservo che la condizione equivale a dire che

$$\text{Rango}(\nabla f(x_m), \nabla \Phi_1(x_m), \dots, \nabla \Phi_k(x_m)) \leq k$$

Quando $m \rightarrow +\infty$ la matrice tende a $(\nabla f(x_0) | \nabla \Phi_1(x_0) | \dots | \nabla \Phi_k(x_0))$
e il rango è $\leq k$ (infatti per ogni $m \in \mathbb{N}$ tutti i minori $(k+1) \times (k+1)$
si annullano, dunque per continuità si annullano al limite)

Resta solo da dim. che $x_m \rightarrow x_0$. Se così non fosse esisterebbe
una s.succ. $x_{n_k} \rightarrow y_0 \neq x_0$. Ci sono 2 casi

• se $y_0 \notin V$, allora esiste un indice i t.c. $\Phi_i(y_0) \neq 0$

Ma allora

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F_{n_k}(x_{n_k}) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{f(x_{n_k})}_{\downarrow f(y_0)} + n_k \underbrace{\Phi_i^2(x_{n_k})}_{\downarrow \infty} = +\infty$$

$\Phi_i^2(y_0) \neq 0$

il che è assurdo perché $F_{n_k}(x_{n_k}) \leq F_{n_k}(x_0) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{sostituz.}}$

• se $y_0 \in V$, allora

$$F_{n_k}(x_{n_k}) \geq f(x_{n_k})$$

↑
butto via
roba ≥ 0

Quando $k \rightarrow \infty$

$$f(x_0) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(x_{n_k}) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(y_0) > f(x_0)$$

il che è assurdo come prima se $y_0 \neq x_0$ (e qui ho usato il minimo stretto).

— o — o —

Linguaggio più moderno: dimostrare che

$$\Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F_\infty(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in V \\ +\infty & \text{se } x \notin V \end{cases}$$

C'è un equicompatto $\overline{B}_\delta(x_0)$ e quindi per il tes. di Gamma conv. i minimi di $F_n(x)$ hanno come p.ti limite solo minimi di $F_\infty(x)$, ma F_∞ ha come unico minimo x_0

Dim della Gamma convergenza di $F_n(x)$ a $F_\infty(x)$

(LIMSUP) $F_n(x) \rightarrow F_\infty(x)$ puntualmente, quindi se recovery posso prendere costanti

(LIMINF) Prendo una qualunque $x_n \rightarrow x_\infty$. Distinguo 2 casi
→ se $x_\infty \notin V$, allora $\exists$ i t.c. $\Phi_i(x_\infty) \neq 0$ e faccio il limite come sopra

$$\rightarrow \text{se } x_\infty \in V, \text{ allora } F_n(x_n) \geq f(x_n)$$

↓
 $f(x_\infty)$

basta fare liminf a RHS e LHS.

— o — o —

Esempio

$$\min \left\{ \int_0^1 m \dot{u}^2 + \arctan(xu^2) dx : u(0)=0, u(1)=7 \right\}$$

Dimostrare che per ogni $m \geq 1$ esiste il minimo.

Posto m_m il valore del minimo, dimostrare che $m_m \rightarrow +\infty$ e calcolare la sua parte principale

$$F_m(u) := \int_0^1 \left[\dot{u}^2 + \frac{1}{m} \arctan(xu^2) \right] dx.$$

$$\text{Idea: } m_m = m \cdot \min \{ F_m(u) : u \in \dots \}$$

$$F_m(u) \xrightarrow{\Gamma} \int_0^1 \dot{u}^2 dx = F_\infty(u)$$

$$\text{quindi } \min \{ F_m(u) : u \in \dots \} \rightarrow \underbrace{\min \{ F_\infty(u) : u \in \dots \}}_{\text{lo sappiamo fare e fa 49}}$$

Esistenza del minimo si vede con metodo diretto.

Se voglio dim. Gamma conv. in H^1 ...

(LIMSUP) banale perché c'è conv. puntuale

(LIMINF) me la cavo osservando che $u_m \rightarrow u_\infty$

$$\begin{aligned} F(u_m) &\geq \int_0^1 \dot{u}_m^2 dx - \frac{\pi}{2} \frac{1}{m} \\ &\quad \downarrow \text{è sci} \quad \downarrow 0 \\ &\geq \int_0^1 \dot{u}_\infty^2 dx \quad \text{messi i liminf al posto giusto} \end{aligned}$$

Infine i pti di minimo del problema con parametro m tendono all'unico pto di min del pben. limite, che è la retta

$$u_\infty(x) = 7x.$$

— o — o —