

Def. Data una succ. $F_n : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si definiscono

$$\Gamma\text{-}\liminf F_n(x) := \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\}$$

$$\Gamma\text{-}\limsup F_n(x) := \inf \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\}$$

Questi esistono sempre. Se coincidono il valore comune è il Γ -limite e si caratterizza in questo modo:

$$\rightarrow (\text{liminf inequality}) \quad \forall x_n \rightarrow x \text{ si ha } \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_n) \geq F_\infty(x)$$

$\Gamma\text{-limite}$
↓

$$\rightarrow (\text{limsup inequality}) \quad \forall x \in X \quad \exists x_n \rightarrow x \text{ t.c. } \limsup_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_n) = F_\infty(x)$$

↑
è in realtà
un limite

Proposizione Gli inf. nella definizione di Γ -liminf e Γ -limsup sono in realtà dei minimi

Teorema Γ -liminf e Γ -limsup, che esistono sempre, sono SCI

Teorema (Stabilità per perturbazioni continue)

Supponiamo che

$$(i) \quad F_\infty(x) = \Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x)$$

$$(ii) \quad G : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

Allora tesi

$$\Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} (F_n(x) + G(x)) = F_\infty(x) + G(x)$$

Variaute al teo precedente (Stabilità per perturbazioni SCI)

Supponiamo

(i) come sopra

(ii) $G: X \rightarrow \mathbb{R}$ solo SCI

(iii) $F_\infty(x)$ è anche limite puntuale di $F_n(x)$.

Allora vale ancora la tesi

Dim della stabilità Voglio dim. che $F_\infty(x) + G(x)$ è il Γ -limite di $F_n(x) + G(x)$.

LIMINF Data una qualunque $x_n \rightarrow x_\infty$ si ha che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) + G(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} G(x_n)$$

$$\geq F_\infty(x_\infty) + G(x_\infty)$$

$\uparrow$
 G è SCI e disug. del liminf per F_∞

LIMSUP Dato $x_\infty \in X$, sia $x_n \rightarrow x_\infty$ una recovery per F_∞ .

Dico che è una recovery per $F_\infty + G$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) + \underbrace{G(x_n)}_{\substack{\downarrow \text{ se } G \text{ è continua} \\ G(x_\infty)}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) + G(x_\infty)$$

$$\leq F_\infty(x_\infty) + G(x_\infty)$$

$\uparrow$
 x_n è recovery

Quindi se G è continua ho una recovery.

Se F_∞ è anche il limite puntuale posso usare $x_n \equiv x_\infty$ come recovery, e allora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) + G(x_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_\infty) + G(x_\infty)$$

$$= F_\infty(x_\infty) + G(x_\infty).$$

Teorema (convergenza di minimi e "minimizers").

Sia $F_n: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ una successione

Supponiamo che esista

$$F_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \quad \forall x \in X$$

Supponiamo che esista $K \subseteq X$ compatto tale che

$$\inf \{F_n(x) : x \in X\} = \inf \{F_n(x) : x \in K\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo stesso per ogni n

Allora

(1) $F_\infty(x)$ ammette minimo su X

(2) si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{F_n(x) : x \in X\} = \min \{F_\infty(x) : x \in X\}$$

(3) Sia x_n una qualunque successione in K tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) - \inf \{F_n(x) : x \in X\} = 0 \quad (\text{quasi minimi})$$

Supponiamo che $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$. Allora

$$F_\infty(x_\infty) = \min \{F_\infty(x) : x \in X\}$$

Dim. Considero la successione $I_n := \inf \{F_n(x) : x \in X\}$.
Sia

$$I_\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} I_n$$

Allora esiste $n_k \rightarrow \infty$ t.c. $I_{n_k} \rightarrow I_\infty$. Prendo una qualunque succ. come nel p.to (iii) e posso supporre, a meno di ulteriori s.succ., che $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$. Riassumendo

$$I_{n_k} \rightarrow I_\infty$$

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty$$

Dico che x_∞ è un p.to di minimo per F_∞ , cioè

$$F_\infty(x_\infty) \leq F_\infty(y) \quad \forall y \in X$$

Prendo una recovery $y_n \rightarrow y$ per y . Allora

$$F_\infty(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{recovery}}}{\geq} \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(y_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } I_n}}{\geq} \limsup_{n \rightarrow \infty} I_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{banale}}}{\geq} \liminf_{n \rightarrow \infty} I_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di } I_\infty}}{=} I_\infty$$

Vorrei dire che $I_\infty \geq F(x_\infty)$. Infatti

$$I_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} I_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(x_{n_k}) \underset{(\star)}{\geq} F_\infty(x_\infty)$$
$$I_{n_k} = F_{n_k}(x_{n_k}) + \underbrace{I_{n_k} - F_{n_k}(x_{n_k})}_{\downarrow 0}$$

($\star$) Fatto generale: se F_∞ è il Γ -limite di F_n , allora

$$x_{n_k} \rightarrow x_\infty \Rightarrow \liminf F_{n_k}(x_{n_k}) \geq F_\infty(x_\infty)$$

Questo è banalmente la (liminf inequality): basta completare x_{n_k} ad una successione definita $\forall n \in \mathbb{N}$ ponendo $x_n = x_\infty$ se n non è nella s.succ. (se $F_n \xrightarrow{\Gamma} F_\infty$, allora $F_{n_k} \xrightarrow{\Gamma} F_\infty$)

Questo completa la dim. di (1), ma essendo tutte ugualianze abbiamo che

$$F_\infty(x_\infty) = \limsup I_n = \liminf I_n = F_\infty(x_\infty)$$

il che dimostra la (2).

In realtà abbiamo dim. anche la (3) cioè che $F_{n_k}(x_{n_k}) \rightarrow F_\infty(x_\infty)$ quindi ogni limite di s.succ. di x_n è p.to di min. per F_∞ .

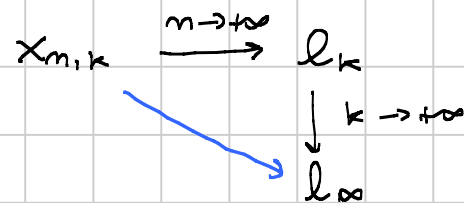
Lemma (Successioni a 2 indici)

Sia $x_{m,k}$ una succ. a 2 indici a valori in un metrico X .

Supponiamo che

(i) Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_{m,k} = l_k \in X$$



(ii) esiste $\lim_{k \rightarrow +\infty} l_k = l_{\infty} \in X$.

Allora

(1) esiste $k_m \rightarrow +\infty$ (volendo anche strett. crescente) tale che

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_{m, k_m} = l_{\infty}$$

(2) esiste $n_k \rightarrow +\infty$ (volendo anche strett. cresc.) tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k, k} = l_{\infty}$$

- (1) uno per riga
(2) uno per colonna

aggiunto dopo video: è il contrario

