

GAMMA CONVERGENZA Sia (X, d) metrico

Sia $F_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni
 $\uparrow$ o anche $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Sia $F_\infty : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si dice che F_n gamma converge a F_∞ e si scrive

$$F_\infty(x) = \Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$$

se valgono questi due fatti:

(1) (LIMINF INEQUALITY) $\forall x_n \rightarrow x$ (succ. conv. in X) si ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) \geq F_\infty(x)$$

(2) (LIMSUP INEQUALITY) Per ogni $x \in X$ esiste $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) \leq F_\infty(x).$$

Ogni $x_n \rightarrow x$ che verifica la d'sug. di sopra si dice
 RECOVERY SEQUENCE per x .

Oss. Quando c'è Γ -convergenza tutte le recovery sequence
 soddisfano

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) = F_\infty(x)$$

Dim. Infatti

$$F_\infty(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) \overset{\text{banale}}{\leq} \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) \overset{\text{recovery}}{\leq} F_\infty(x)$$

$\uparrow$ liminf ineq.

Oss. Si può generalizzare molto, arrivando a supporre

$$F_n : X_n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$\uparrow$
tutti diversi

$$F_\infty : X_\infty \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

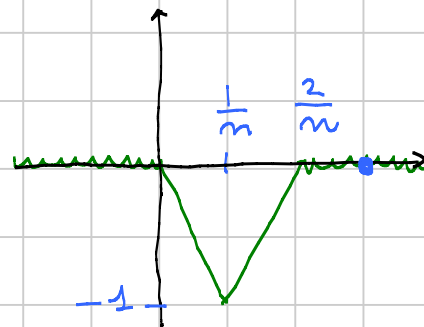
per di avere una nozione di convergenza

$$\begin{array}{ccc} X_n & \longrightarrow & X_\infty \\ \cong & & \cong \\ X_n & & X_\infty \\ \text{---} 0 \text{---} 0 \text{---} & & \end{array}$$

Esempio 1 $X = \mathbb{R}$

$F_n(x)$ come in figura.

Allora



$$\Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F_\infty(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Dim. Devo mostrare 2 disuguaglianze

① (liminf) $\forall x_n \rightarrow x$ si ha $\liminf F_n(x_n) \geq F_\infty(x)$

- se $x=0$ è banale perché $F_n(x_n) \geq -1 = F_\infty(0)$
- se $x \neq 0$ allora definitivamente $F_n(x_n) = 0$

② (limsup) Per ogni $x \in X$ esiste $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$\limsup F_n(x_n) \leq F_\infty(x)$$

- se $x \neq 0$ basta prendere $x_n \equiv x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- se $x=0$ prendo $x_n = -\frac{1}{n}$ e ho la tesi.

$$\text{---} 0 \text{---} 0 \text{---}$$

Oss. Nell'esempio $F_n(x) \rightarrow 0$ puntualmente, ma il Γ -limite è diverso.

Quindi

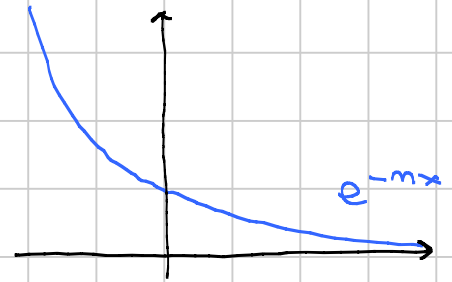
Γ -limite e limite puntuale non hanno nulla a che fare.

Esempio 2 $X = \mathbb{R}$ $F_n(x) := e^{-nx}$

Puntualmente

$$F_n(x) \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

↑
PUNTUALMENTE



Invece

$$\Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F_\infty(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

[Dim.: tutto banale, tranne trovare la recovery per $x=0$.
Basta prendere

$$x_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \quad F_n(x_n) \rightarrow 0 \quad]$$

Esempio 3 $X = \mathbb{R}$ $F_n(x) = \sin(nx)$

$$\Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) \equiv -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

[L'unico problema è trovare la recovery che segue dalla densità dei pti del tipo

$$nx = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad x_n = \frac{3\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n} \quad]$$

Esempio 4 $X = \mathbb{R}$ $F_n(x) = x^2 + n \cos^2 x$

$$\Gamma\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

← verificare liminf ineq.

Def. Si definiscono Γ -liminf e Γ -limsup in questo modo

$$\Gamma\text{-liminf}_{n \rightarrow \infty} F_n(x) := \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\}$$

$$\Gamma\text{-limsup}_{n \rightarrow \infty} F_n(x) := \inf \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) : x_n \rightarrow x \right\}$$

Oss. Γ -liminf e Γ -limsup esistono sempre e coincidono se e solo se c'è il Γ -limite. In generale vale solo

$$\Gamma\text{-liminf}_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \Gamma\text{-limsup}_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \quad \forall x \in X$$

[Dim.: esercizio]

Def. ulteriore Quelli sopra sono Γ^- -liminf e Γ^- -limsup.

Si possono definire anche Γ^+ -liminf e Γ^+ -limsup semplicemente mettendo sup invece di inf. in potenza.

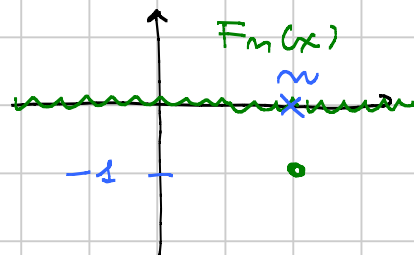
Esempio $X = \mathbb{R}$ $F_n(x) = (-1)^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

In questo caso Γ^- -liminf = -1 $\forall x \in \mathbb{R}$
 Γ^- -limsup = +1 $\forall x \in \mathbb{R}$.

Domanda: è vero che

$$\sup \{ F_n(x) : x \in X \} \rightarrow \inf \{ F_0(x) : x \in X \} ?$$

NO!



Esempio Se tutte le $F_n(x)$ sono la stessa funzione $F(x)$,
il T-limite non è $F(x)$, ma è il rilassato.

Proposiz. (X, d) metrico, $F_n : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) per ogni $n \in \mathbb{N}$ la F_n ha minimo in $x_n \in X$

(ii)

$$T\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F_\infty(x)$$

(iii) $x_n \rightarrow x_\infty$

Allora x_∞ è p.to di minimo per $F_\infty(x)$.

Dim. Prendi y qualunque in X e prendi una sua recovery
 $y_n \rightarrow y_\infty$ (quindi $F_n(y_n) \rightarrow F_\infty(y)$).

Allora

$$F_\infty(x_\infty) \leq \liminf F_n(x_n) \leq \liminf F_n(y_n) = F_\infty(y)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
liminf ineq. x_n è minimo per ogni $n \in \mathbb{N}$ y_n è recovery per y
(è anche lim.) $\square$

— o — o —