

Def.  $(X, d)$  metrico,  $E: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Un sottoinsieme  $D \subseteq X$  si dice denso in energia se

$$\forall x \in X \quad \exists \{x_n\} \subseteq D \quad \text{t.c.} \quad x_n \rightarrow x \quad \text{e} \quad E(x_n) \rightarrow E(x)$$

Oss. È equivalente a dire che i p.ti  $\{(x, E(x)): x \in D\}$  sono un sottoinsieme denso del grafico di  $E$ .

Lemma  $(X, d)$  metrico,  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supponiamo che

- (i)  $D \subseteq X$  è denso in energia per  $G(x)$ ,
- (ii)  $F(x) \leq G(x)$  per ogni  $x \in D$ ,
- (iii)  $F(x)$  è SCI in  $X$ .

Allora

$$F(x) \leq G(x) \quad \forall x \in X$$

Dim. Prendo un arbitrario  $x_0 \in X$  e prendo  $\{x_n\} \subseteq D$  t.c.  
 $x_n \rightarrow x_0$  e  $G(x_n) \rightarrow G(x_0)$ .

Allora

$$F(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} G(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G(x_n) = G(x_0)$$

$\uparrow$   $F$  è SCI                       $\uparrow$  (ii)                       $\uparrow$   $x_n$  ha la propr. di sopra

— o — o —

Utilizzo operativo Sospetto che  $G(x)$  sia il rilassato di una certa  $F(x)$   
 Devo dimostrare

①  $\bar{F}(x) \leq G(x)$

②  $\bar{F}(x) \geq G(x)$

Per la ② una possibile strategia è mostrare che

(i)  $F(x) \geq G(x)$  per ogni  $x \in X$

(ii)  $G(x)$  è SCI

Per la ① grazie al lemma basta fare la verifica per ogni  $x \in D$ , dove  $D$  è denso in energia per  $G$ .

— o — o —

Oss. Per verificare che  $G(x)$  è il rilassato di  $F(x)$  posso mostrare due cose

(i) (Liminf inequality)  $\forall x_n \rightarrow x$  vale  $\liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \geq G(x)$

(Questo dice che  $\bar{F}(x) \geq G(x)$ )

(ii) (Limsup inequality)  $\forall x \in D$  (denso in energia per  $G$ ) esiste  $x_n \rightarrow x$  tale che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \leq G(x)$$

(Questa dice che  $\bar{F}(x) \leq G(x)$ ) Se è vero per il limsup, a maggior ragione lo sarà per il liminf.

In realtà a posteriori il limsup è un limite.

$$G(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \leq G(x)$$

— o — o —

Lemma Sia  $\bar{F}$  il rilassato di  $F$ . Allora

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in X \quad \text{t.c.} \quad \text{dist}(y, x) \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad F(y) \leq \bar{F}(x) + \varepsilon$$

Dim. Prendo una recovery per  $x$  e ho  $x_n \rightarrow x$ ,  $F(x_n) \rightarrow \bar{F}(x)$ . Posso prendere  $y = x_n$  per  $n$  grande.

Nuova d'm. che  $\overline{F}(x)$  e SCI

Sia  $x_n \rightarrow x_0$  una qualunque successione.

Uso il lemma con  $x = x_n$  e  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ . Trovo un pto  $y_n \in X$  t.c.

$$\text{dist}(y_n, x_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad F(y_n) \leq \overline{F}(x_n) + \frac{1}{n}.$$

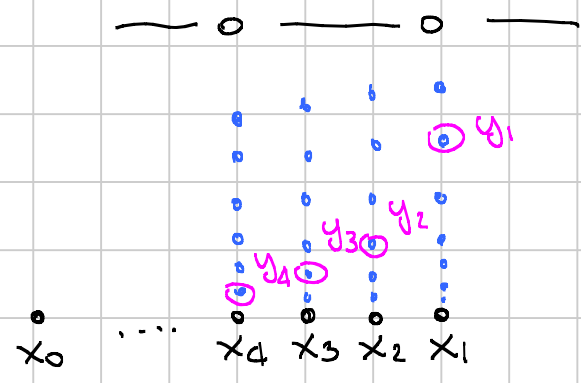
Osservo che  $y_n \rightarrow x_0$  perché

$$\begin{aligned} \text{dist}(y_n, x_0) &\leq \text{dist}(y_n, x_n) + \text{dist}(x_n, x_0) \\ &\leq \frac{1}{n} + 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\overline{F}(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \overline{F}(x_n) + \frac{1}{n} \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \overline{F}(x_n).$$

$\uparrow$  def. di  $\overline{F}$        $\uparrow$  disug. sopra       $\uparrow$  propr. liminf.



Morale: ho costruito una recovery di  $x_\infty$  attingendo alle recovery degli  $x_n$ .



## ESTENSIONE PER RILASSAMENTO

$(\hat{X}, d)$  spazio metrico

$$X \subseteq \hat{X}$$

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}$$

Voglio estendere  $f$  a tutto  $\hat{X}$ , cioè trovare

$$\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che (almeno)

$$\hat{f}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in X.$$

Un modo per farlo è di considerare come  $\hat{f}(x)$  la più grande  $g: \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$  semicontinua tale che

$$g(x) \leq f(x) \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Questo è equivalente a rilassare

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio 1  $X = C^1([a, b])$  oppure  $C^{2+}$   $\hat{X} = C^0([a, b])$   $\uparrow$  Decide la distanza

$$F(u) = \int_a^b \dot{u}^2 dx. \quad \text{Voglio estendere } F \text{ a } \hat{X}.$$

L'estensione sarà

$$\hat{F}(u) := \begin{cases} \int_a^b \dot{u}^2 dx & \text{se } u \in H^1((a, b)) \\ +\infty & \text{se } u \in C^0 \setminus H^1 \end{cases}$$

Dim. Devo dimostrare due cose

$$(LIMINF) \quad \forall u_n \xrightarrow[\text{in } C^0]{\quad} u_\infty \quad \text{vale} \quad \liminf F(u_n) \geq \hat{F}(u_\infty)$$

Se  $\liminf = +\infty$ , non c'è nulla da dim.

Se  $\liminf < +\infty$ , allora esiste una s.succ. con  $F(u_{n_k}) \leq M$

Ma allora  $\dot{u}_{m_k}$  ammette una sottosucc. (che non rinomino) convergente

$$\dot{u}_{m_k} \rightarrow v_\infty$$

Sapendo già che  $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$  in  $C^0$ , deduco che  $u_\infty \in H^1$  e  $\dot{u}_\infty = v_\infty$ .

A quel p.to concludo con la semicontinuità della norma.

(LIMSUP) Devo mostrare che per ogni  $u \in C^0$  esiste

$$\begin{matrix} u_m \rightarrow u & \text{in } C^0 \\ \uparrow \\ & \text{in } C^1 \end{matrix}$$

tale che

$$\limsup F(u_m) \leq \hat{F}(u)$$

Non devo dim. nulla se  $\hat{F}(u) = +\infty$ , cioè  $u \notin H^1$ .

Se invece  $u \in H^1$ , è proprio la definizione (H) dello spazio di Sobolev a garantire l'esistenza di  $u_m$ .

$$\begin{array}{lll} u_m \rightarrow u & L^2 & \rightsquigarrow \text{si rinforza a convergenza in } C^0. \\ \dot{u}_m \rightarrow \dot{u} & L^2 & \rightsquigarrow F(u_m) \rightarrow \hat{F}(u) \end{array}$$

Esempio 2 Allo stesso modo di prima voglio estendere  $F(u)$  da  $C^1$  ad  $L^2$ .

Si possono ripercorrere tutti i passaggi e l'estensione risulta la stessa.

Si può anche definire lo spazio di Sobolev  $H^1$  come l'insieme delle  $u \in L^2$  o dove preferisco in cui  $\hat{F}(u) < +\infty$ .

Esempio 3  $X = \{ u \in C^1([a, b]) : u(a) = 7, u(b) = 14 \}$

$$F(u) = \int_a^b (u'^2 + u^2) dx$$

Cosa succede se estendo per rilassamento in  $C^0$  o in  $L^2$

Risposta

$$\hat{F}(u) = \int_a^b (u'^2 + u^2) dx \quad u \in H^1(a, b) \text{ e } u(b) = 14$$

altimenti

Morale: la condizione su  $u'$  viene persa.

— o — o —