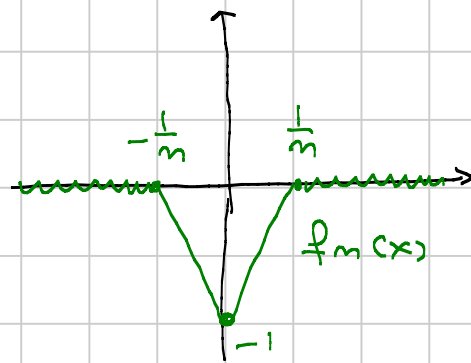


Oss. Il sup di funzioni continue è solo SCI
in generale

Esempio Se $F(x) = 1_Q(x)$ su $\mathbb{R}$,
allora

$$\bar{F}(x) \equiv 0$$



RILASSATO E PROBLEMI DI MINIMO Sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\textcircled{1} \quad \inf \{ F(x) : x \in X \} = \inf \{ \bar{F}(x) : x \in X \}$$

Dim. È banale in $\geq$. Vediamo l'altra.

Supponiamo che $\inf \bar{F} \in \mathbb{R}$ (se è $-\infty$ la dim. è analoga)
Chiamiamolo l

Per def. di $\inf \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X$ t.c.

$$\bar{F}(x) \leq l + \varepsilon$$

Prendo la recovery di x e ho che $x_n \rightarrow x$ e

$$\inf F \leq F(x_n) \leq l + 2\varepsilon$$

Quindi $\inf F \leq \inf \bar{F} + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Faccio $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

$\textcircled{2}$ Supponiamo x_0 sia pto di min. del rilassato e supponiamo che

$$\bar{F}(x_0) = F(x_0)$$

Allora x_0 è pto di minimo di $F(x)$

Dim. $\forall x \in X: F(x) \geq \bar{F}(x) \geq \bar{F}(x_0) = F(x_0)$.

③ Supponiamo che

$$m := \min \{ \bar{F}(x) : x \in X \} \in \mathbb{R}$$

e supponiamo che $\exists M > m$ t.c.

$\{ x \in X : \bar{F}(x) \leq M \}$ è compatto

(Questo è gratis se tutti i sottolivelli di $\bar{F}(x)$ sono compatti)

Allora

$$\rightarrow m = \inf \{ F(x) : x \in X \}$$

$$\rightarrow \text{ogni successione } \{x_n\} \subseteq X \text{ t.c. } F(x_n) \rightarrow m$$

(successioni "infizzanti")

ha una sottosuccessione che tende ad un p.to di min. del rilassato.

Se in aggiunta il p.to di min. di $\bar{F}(x)$ è unico, allora tutte le succ. infizzanti di $F(x)$ tendono a lui

Dim. La prima conclusione è un fatto precedente.

Data una qualunque succ. x_n con $F(x_n) \rightarrow m$, definitivamente $M \geq F(x_n) \geq \bar{F}(x_n)$, quindi la succ. sta nel sottolivello, quindi converge a meno di s.succ.

Mettiamo che $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$. Allora

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{F(x_{n_k})} & \geq & \bar{F}(x_{n_k}) & \geq & \boxed{m} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ m & & & & m \end{array}$$

Quindi $\bar{F}(x_{n_k}) \rightarrow m$, d'altra parte

$$m = \liminf \bar{F}(x_{n_k}) \geq \bar{F}(x_\infty) \geq m$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
lga sopra $\bar{F}$ è SCI $m = \min \bar{F}$

— 0 — 0 —

FATTO M

Sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $G: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Allora

$$\overline{F+G}(x) = \overline{F}(x) + G(x)$$

(se G è solo SCI vedere che succede)

Dim. $\overline{F}(x) + G(x)$ è SCI e $\leq F(x) + G(x)$

Quindi per la caratterizzazione del rilassato come inviluppo

$$\overline{F}(x) + G(x) \leq \overline{F+G}(x)$$

(Questo vale allo stesso modo se $G(x)$ è solo SCI)

Resta da dim. la disug. opposta, cioè $\overline{F+G}(x) \leq \overline{F}(x) + G(x)$

Prendo $x_0 \in X$ arbitrario, prendo $x_n \rightarrow x_0$ la sua recovery per $F(x)$ e vedo cosa succede

$$F(x_n) + G(x_n) \rightarrow \overline{F}(x_0) + G(x_0)$$

continuità

Visto che $\overline{F+G}(x_0)$ è l'inf. su tutte le successioni, ho la tesi.

— o — o —

Per allenamento, vedere cosa succede se $G(x)$ è solo SCI o in generale cosa succede per il rilassato della somma.

— o — o —

Def. Sia $E: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione qualunque. Un sottoinsieme $D \subseteq X$ si dice **DENSO IN ENERGIA** (wrt E) se

$$\forall x \in X \quad \exists \{x_n\} \subseteq D \quad \text{b.c.} \quad \underbrace{x_n \rightarrow x}_{D \text{ è denso in } X} \quad \text{e} \quad \underbrace{E(x_n) \rightarrow E(x)}_{\text{densità rispetto alla funzione}}$$

Esempio (banale) Se E è continua, ogni $D \subseteq X$ denso è denso in energia.

METADISCORSO Come calcolo il rilassato di una data $F(x)$?

Cerco di capire in qualche modo chi è. Sia $G(x)$ quello che penso essere il rilassato. A questo punto dimostro

- $F(x) \geq G(x)$ per ogni $x \in X$
- $G(x)$ è SCI
- devo far vedere che per ogni $x_0 \in X$ esiste $x_n \rightarrow x_0$ tale che

$$F(x_n) \rightarrow G(x_0)$$

[Dim. A quel punto

$$\bar{F}(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = G(x_0) \quad \text{che è quello che serve}]$$

Fatto n+1 Se trovo un denso in energia $D \subseteq X$ per $G(x)$ tale che

$$\forall x_0 \in D \quad \exists x_n \rightarrow x_0 \quad \text{tale che} \quad F(x_n) \rightarrow G(x_0)$$

allora vale lo stesso in X , cioè

$$\forall x_0 \in X \quad \exists x_n \rightarrow x_0 \quad \text{tale che} \quad F(x_n) \rightarrow G(x_0)$$

e ancora meglio

$$\bar{F}(x_0) \leq G(x_0) \quad \forall x_0 \in X$$

Dim. Prendo $x_0 \in X$ qualunque, prendo $\{x_n\} \subset D$ tale che

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \text{e} \quad G(x_n) \rightarrow G(x_0)$$

Allora per ipotesi

$$\bar{F}(x_n) \leq G(x_n)$$

e facendo tendere $n \rightarrow +\infty$ ottengo

$$\bar{F}(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \bar{F}(x_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} G(x_n) = G(x_0)$$

$\bar{F}$ è sci

disug. sopra

□

— o — o —

Programma per il futuro

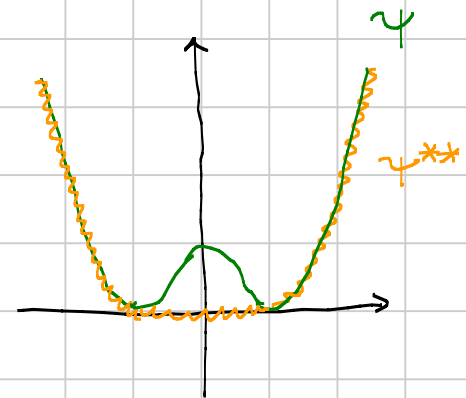
$$F(u) = \int_a^b \psi(\dot{u}(x)) dx$$

Visto in ante: F è sci rispetto alla conv. debole sulle derivate
e forte sulle funzioni se ψ è convessa.

Se ψ non è convessa, il rilassato sarà

$$\bar{F}(u) = \int_a^b \psi^{**}(\dot{u}(x)) dx$$

$\uparrow$
funzione
convessificata



"Se lo so fare per le rette, lo so fare in generale".

— o — o —