

RILASSAMENTO (RELAXATION, LOWER SEMICONT. ENVELOPE)

Richiami sulla semicontinuità Sia (X, d) uno spazio metrico.

I seguenti fatti sono equivalenti per una $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

(i) per ogni $x \in X$ vale

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x)$$

(ii) per ogni successione convergente $x_n \rightarrow x_\infty$ vale

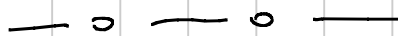
$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_\infty)$$

(iii) per ogni $M \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in X : f(x) \leq M\}$ è CHIUSO

(iv) il sopragrafico (epigrafico)

$$\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : x \in X, y \geq f(x)\}$$

è chiuso nel prodotto.



Def. Sia (X, d) uno sp. metrico e sia $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale. Si dice RILASSATO di F il funzionale così definito

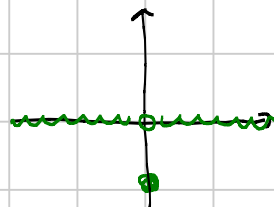
$$\bar{F}(x) := \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) : x_n \rightarrow x \right\}$$

Oss. Il rilassato non è $\bar{F}(x) = \liminf_{y \rightarrow x} F(y)$, ma è solo $\leq$

In fatti a competere per l'inf c'è anche la succ. costante $x_n \equiv x$

Esempio

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \neq 0 \\ -1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad X = \mathbb{R}$$



In questo caso $\bar{F}(x) = F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre

$$\liminf_{y \rightarrow 0} F(y) = 0 \neq -1 = \bar{F}(0).$$

Fatto 1 $\bar{F}(x) \leq F(x)$ per ogni $x \in X$

[Dim. Basta usare $x_n \equiv x$]

Fatto 2 L'inf nella def. di rilassato è un minimo, anzi per ogni $x \in X$ esiste $x_n \rightarrow x$ t.c.

$$\bar{F}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n)$$

[Dim. Osserviamo che $\bar{F}(x)$ può anche fare $-\infty$.

Supponiamo che

$$\bar{F}(x) \in \mathbb{R}$$

per un certo $x \in X$. Voglio trovare $x_n \rightarrow x$ t.c.

$F(x_n) \rightarrow \bar{F}(x)$. Per def. di inf, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste

$$x_n^{(\varepsilon)} \rightarrow x \text{ t.c. } \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n^{(\varepsilon)}) \leq \bar{F}(x) + \varepsilon$$

A meno di estrane posso anche supporre che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n^{(\varepsilon)}) \leq \bar{F}(x) + \varepsilon$$

Pertanto esiste $x^{(\varepsilon)}$ tale che $F(x^{(\varepsilon)}) \leq \bar{F}(x) + 2\varepsilon$

$$\text{dist}(x^{(\varepsilon)}, x) \leq \varepsilon$$

(Basta prendere n abbastanza grande)

Ma allora se definisco $x_k := x^{(\frac{1}{k})}$ ho raggiunto l'obiettivo

$$\text{dist}(x_k, x) \leq \frac{1}{k} \quad F(x_k) \leq \bar{F}(x) + \frac{2}{k}$$

Passo al limite per $k \rightarrow +\infty$

Se $\bar{F}(x) = -\infty$ si procede allo stesso modo partendo da

$$F(x_m^{(n)}) \leq -M$$

Fatto 3 Per ogni $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ il rilassato è s.c.l.

Lemma Supponiamo che $\bar{F}(x) \in \mathbb{R}$.

Allora

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } F(y) \geq \bar{F}(x) - \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x)$$

Dim. Per assurdo supponiamo che non sia vero. Allora

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \exists y \in B_\delta(x) \quad F(y) < \bar{F}(x) - \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{k}$ e ottengo y_k t.c.

$$\text{dist}(y_k, x) \leq \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad F(y_k) \leq \bar{F}(x) - \varepsilon_0$$

Ma allora $y_k \rightarrow x$, quindi compete nella def. di rilassato, quindi

$$\bar{F}(x) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} F(y_k) \leq \bar{F}(x) - \varepsilon_0$$

il che è assurdo

Dim. del fatto 3 dato il Lemma

Sia dato $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ come nel Lemma.

Allora $F(y) \geq \bar{F}(x) - \varepsilon$ per ogni y con $\text{dist}(y, x) < \delta$.

Ma data una succ. $y_n \rightarrow y$, questa definitivamente entra in $B_\delta(x)$, quindi

$$F(y_n) \geq \bar{F}(x) - \varepsilon \quad \text{definitiv.}$$

quindi

$$\liminf F(y_n) \geq \bar{F}(x) - \varepsilon$$

Visto che vale per ogni successione $y_n \rightarrow y$, questo mostra che

$$\bar{F}(y) \geq \bar{F}(x) - \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x)$$

$\uparrow$
aperta

Questo implica che

$$\liminf_{y \rightarrow x} \bar{F}(y) \geq \bar{F}(x) - \varepsilon$$

Ma essendo ε ed x arbitrari abbiamo dimostrato che $\bar{F}$ è s.c.i.

— o — o —

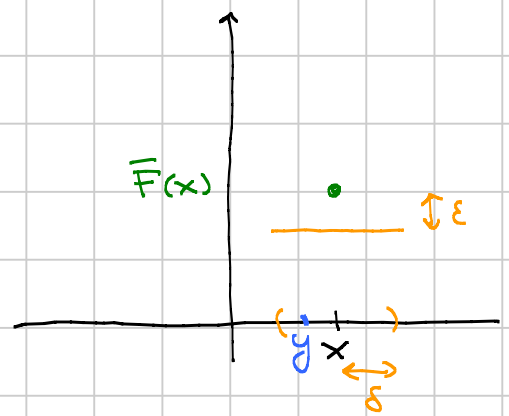
Def. Data $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo considerare

$$G(x) := \sup \{ g(x) : g \text{ è s.c.i. e } g(x) \leq F(x) \quad \forall x \in X \}$$

$\uparrow$
è il sup di tutte le funzioni s.c.i.
che sono $\leq F$.

Si chiama $(G(x))$ involucro semicontinuo inferiormente di $F(x)$.
(Potrebbe essere $-\infty$ o tappeto).

— o — o —



FATTO GENERALE

Sia $F_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ per $i \in I$ una famiglia di funzioni s.c.i. Poniamo

$$F_*(x) := \sup \{ F_i(x) : i \in I \}$$

Allora F_* è s.c.i.

Dim. 1

$$F_*(x) \geq F_i(x) \quad \forall x \in X \quad \forall i \in I$$

quindi fissato $x \in X$

$$\liminf_{y \rightarrow x} F_*(y) \geq \liminf_{y \rightarrow x} F_i(y) \geq F_i(x) \quad \forall i \in I$$

Facendo il sup su $i \in I$ al LHS non cambia nulla, al RHS ottengo proprio $F_*(x)$.

Dim. 2

I sottolivelli di F_* sono l'intersezione dei sottolivelli (chiusi di F_i)

Dim. 3

Stesso discorso con gli epigrafici.

Conclusione : L'involuppo s.c.i. di $F(x)$, cioè $G(x)$, è s.c.i.

FATTO 4

Il rilassato coincide con l'involuppo s.c.i. di $F(x)$

Dim.

Sappiamo che $\bar{F}(x)$ è s.c.i, quindi $\bar{F}(x) \leq G(x)$ per ogni $x \in X$.

D'altra parte dico che tutte le $g(x)$ s.c.i. che stanno sotto $F(x)$ stanno anche sotto $\bar{F}(x)$.

Prendo un qualunque $x_0 \in X$ e prendo una succ. $x_n \rightarrow x_0$ tale che

$$F(x_n) \rightarrow \bar{F}(x_0)$$

(sappiamo che esiste dal fatto 2)

Allora $F(x_n) \geq g(x_n)$ e anche $F(x_n) \geq G(x_n)$
 Faccio liminf a dx e sx

$$\bar{F}(x_0) = \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} G(x_n) \geq G(x_0)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 è un limite G è sc1

Questo completa la dimostrazione

— o — o —

Def. Ogni successione $x_n \rightarrow x_0$ t.c. $F(x_n) \rightarrow \bar{F}(x_0)$
 si chiama

RECOVERY SEQUENCE

per il p.to x_0 .

— o — o —