

Esempio

$$\begin{cases} u'' = \lambda \sin u \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Una soluzione si vede subito: $u(x) \equiv 0$.

Claim: se λ è abbastanza grande, ce n'è almeno un'altra.

Idea: vedo l'eq. come l'Eulero di

$$F(u) := \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 dx - \lambda \int_0^1 \cos u dx$$

funz. nulla

e mostro che per $\lambda \gg 1$ il minimo è $< F(0)$, quindi $u(x) \equiv 0$ non è p.to di minimo, quindi ci deve essere un'altra soluz.

L'esistenza del minimo segue dal metodo diretto.

Basta dim. che $\forall \lambda \gg 1$ esiste u da qualche parte t.c. $F(u) < F(0)$.

NO: qui banalmente il minimo è la funzione nulla.

Esempio $u'' = \lambda g(u)$

$$u(0) = 0$$

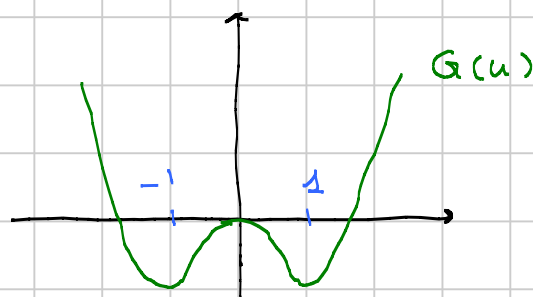
$$u(1) = 0$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \int \dot{u}^2 + \lambda \int G(u)$$

Abbiamo scelto $G(u)$ t.c. $G(0) = 0$.

Così è ovvio che $F(u \equiv 0) = 0$. Se anche $g(0) = 0$, allora ok che $u \equiv 0$ è una soluzione.

Se G è come in figura, allora per $\lambda \gg 1$ si ha che $u \equiv 0$ non è minimo.



Idea: prendo una $w(x)$ che vale quasi sempre 1, tranne vicino al bordo e allora



$$F(w) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{w}^2 + \lambda \underbrace{\int_0^1 G(w) dx}_{\text{negativo}}$$

$\uparrow$
 evanisce
 ma fisso

Quindi $F(w) < 0$ per $\lambda \gg 1$, quindi c'è un'altra soluzione.

(Oss.: basta una qualunque w che sta in $(0, 1)$)

Esempio iniziale rivisitato $u'' = -\lambda \sin u$

$$\leadsto F(u) = \frac{1}{2} \int \dot{u}^2 + \lambda \int \cos u$$



Per λ grande $u(x) \equiv 0$ non è p.to di min.

Come sopra serve una $w(x)$ che sia quasi sempre π

— 0 — 0 —

Quando posso ottenere limitazioni su u

$$F(u) = \int_a^b \dot{u}^2 + \int_a^b g(x, u) dx$$

Sapendo che $F(u) \leq M$, voglio limitare $\int_a^b \dot{u}^2 dx$

Caso banale: $g(x, s)$ limitata inferiormente $g(x, s) \geq k$

Caso quasi banale: $g(x, s) \geq k(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall s \in \mathbb{R}$

$$\uparrow \int_a^b k(x) dx > -\infty$$

$$F(u) = \int_a^b \dot{u}^2 dx - \int_a^b u \sin u dx$$

Qui ce la faccio se ho DBC in un estremo $u(a) = A$.

Idea: sfruttare disuguaglianze che legano u a $\dot{u}$

$$|u(x) - u(a)| \leq \int_a^x |\dot{u}(s)| ds \leq \sqrt{x-a} \|\dot{u}\|_{L^2((a,x))}$$

$\uparrow$
solito

$$\leq |b-a|^{1/2} \|\dot{u}\|_{L^2((a,b))}$$

Ma allora

$$|u(x)| \leq |A| + |b-a|^{1/2} \|\dot{u}\|_{L^2((a,b))} \quad \forall x \in [a,b]$$

Ma allora

$$\left| \int_a^b u \sin u \right| \leq \int_a^b |u| dx$$

$$\leq |A|(b-a) + |b-a|^{3/2} \|\dot{u}\|$$

Questo basta per concludere. Infatti

$$M \geq F(u) = \int_a^b \dot{u}^2 - \int_a^b u \sin u \Rightarrow$$

$$\|\dot{u}\|^2 = \int_a^b \dot{u}^2 \leq M + \int_a^b u \sin u$$

$$\leq \underbrace{M + |A|(b-a)}_{\text{lineare}} + |b-a|^{3/2} \|\dot{u}\|$$

$\uparrow$
Quadratico

$\Rightarrow$ limitazione su $\|\dot{u}\|^2$.

Fatto generale $F(u) = \int_a^b \dot{u}^2 + \int_a^b g(x, u)$

Per ottenere una stima su $\|u\|_{L^2}$ da DBC + stima su $F(u) \leq M$
senza ipotesi del tipo

$$g(x, s) \geq -A - B|s|^\beta \quad \text{con } \beta < 2$$

Esempio $F(u) = \int_a^b (\dot{u}^2 - u^3) dx$

Esiste il minimo con $u(a) = u(b) = 0$?

Basta prendere $w(x) < 0$ in (a, b) e poi considerare

$$F(nw(x)) = \underbrace{n^2}_{\rightarrow 0} \underbrace{\text{roba fissa}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{n^3}_{\rightarrow \infty} \cdot \text{roba fissa} \rightarrow -\infty$$

Il grosso guaio sono gli esempi con esponente 2

$$\int_a^b (\dot{u}^2 - u^2) dx$$

Si vede subito l'alternativa: $\rightarrow 0$ min = 0

$\rightarrow 0$ inf = $-\infty$

Meno banale: se $|b-a|$ è piccolo, è ancora vero che il minimo è 0.

Morale: per esponenti $\neq 2$ contano solo gli ordini
nel caso di crescita quadratica contano le costanti.

$$F(u) = \int_0^1 \cos(\dot{u}) + u^2 \quad u(0) = u(1) = 2015$$

Inf = -1

