

Esempio $\begin{cases} u'' = \arctan u \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 2015 \end{cases}$ Domande: esistenza / unicità

Idea: costruire un funzionale di cui quella data sia l'eq. di Eulero, quindi dim. che c'è il minimo.

Sia $g(x)$ una primitiva di $\arctan$: $g(x) := \int_0^x \arctan t \, dt$

Considero il funzionale $\frac{d}{dx} \psi_p(x, u, u') = \psi_s(x, u, u')$

$$F(u) := \int_0^1 \left[\frac{1}{2} u'^2 + g(u) \right] dx$$

ed il problema di minimo

$$\min \{ F(u) : u \in C^1([0,1]) \text{ t.c. } u(0)=0, u(1)=2015 \}$$

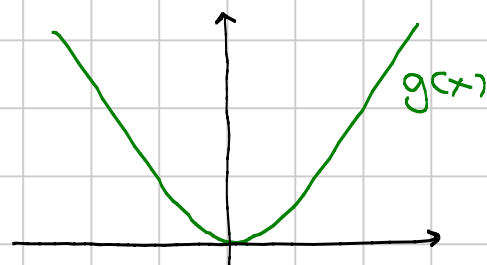
Studio esistenza / unicità con il metodo DIRETTO

① Formulazione debole: stesso $F(u)$ solo per $u \in H^1((0,1))$.
 Noto che le BC hanno senso perché $u \in C^0([0,1])$.

② Compattezza dei sottolivelli di $F(u)$

Sapendo che $F(u) \leq M$, voglio dedurre limitazioni su u e u' .

Osservo che $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
 quindi



$$M \geq F(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{u}^2 + g(u) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 dx$$

$$\Rightarrow \|\dot{u}\|_{L^2}^2 \leq 2M$$

$\Rightarrow u$ è $\frac{1}{2}$ -Hölder con costante limitata dall'alto

$\Rightarrow$ grazie alle BC (ne basterebbe una) $\exists M_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|u(x)| \leq M_2 \quad \forall x \in [0,1].$$

Solite storie $\Rightarrow$ esiste s.succ. $u_{m_k}(x)$ t.c.

Notione di
convergenza
che dà
compattezza

$$\left[\begin{array}{l} u_{m_k}(x) \rightarrow u_\infty(x) \quad \text{unif. in } [0,1] \\ \dot{u}_{m_k}(x) \rightarrow \dot{u}_\infty(x) \quad \text{in } L^2((0,1)) \end{array} \right.$$

Data $\{u_n\} \subseteq H^1((0,1))$ t.c. $F(u_n) \leq M$ esiste s.succ. 

③ Semicontinuità Se $u_n \rightarrow u_\infty$ nella nozione di sopra, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) \geq F(u_\infty)$$

Facile: $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \dot{u}_n^2 dx \geq \int_0^1 \dot{u}_\infty^2 dx$
↑
norma sc1

Inoltre $g(u_n) \rightarrow g(u_\infty)$ unif. in $[0,1]$, quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(u_n) dx = \int_0^1 g(u_\infty) dx$$

Sommando le 2 si ha la tesi.

④ Regolarità Mostriamo che "il" minimo di $F(u)$ in $H^1((0,1))$ (che ora esiste per W.) è in realtà C^∞ .
 per ora "un qualunque"

Sia u la soluzione trovata, e proviamo a ricavare Eulero

$$\varphi(t) := F(u+tv)$$

$$v \in C_c^\infty((0,1))$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 + 2t \dot{u} \dot{v} + t^2 \dot{v}^2 + \int_0^1 g(u+tv) dx \rightarrow v \in C^1([0,1])$$

↑
garantisce BC
con $v(0) = v(1) = 0$
 $\rightarrow v \in H^1((0,1)) + B.C.$

$$\varphi'(t) = \int_0^1 \dot{u} \dot{v} dx + t \int_0^1 \dot{v}^2 dx + \int_0^1 \arctan(u+tv) v dx$$

$$\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \underset{f}{\dot{u}} \underset{g}{\dot{v}} dx = - \int_0^1 \arctan u \cdot v dx$$

Questo dice che $\dot{u}$ è derivabile debolmente e la sua derivata debole è $\arctan u$, quindi

$$\underbrace{(\dot{u})'}_{\substack{\uparrow \\ \text{derivata debole di } \dot{u} \in L^2((0,1))}} = \arctan u$$

Ora $RHS \in C^0 \Rightarrow \dot{u} \in C^1 \Rightarrow u \in C^2 \Rightarrow u$ risolve l'equazione iniziale.

Ovviamente u rispetta le BC perché sono stabili rispetto alla convergenza unif. (andava detto in sede di compattezza)

Per BOOTSTRAP, $u \in C^\infty$.

- ⑤ UNICITÀ Due tecniche $\rightarrow$ lavorare sul funzionale
 $\rightarrow$ lavorare sull'equazione

Sul funzionale: mostrare che tutte le soluzioni dell'eq. sono minimi di $F(u)$ ed il pto di minimo è unico.

Entrambe seguono dalla convessità di $F(u)$ come nel metodo diretto. Sia u una sol. di Eulero, sia w un altro competitor.

Allora

$$\begin{aligned} F(w) &= F(u+v) = \frac{1}{2} \int \dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{v} + \dot{v}^2 + g(u+v) \\ &\quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad \quad \quad w-u \\ &\geq \frac{1}{2} \int \dot{u}^2 + \int \dot{u}\dot{v} + \int g(u) + \int g(u+v) - g(u) \\ &= F(u) + \underbrace{\int \dot{u}\dot{v}}_{\substack{=0 \\ \text{per Eulero}}} + \underbrace{\int g(u+v) - g(u)}_{\substack{\geq \arctan u \cdot v \\ \text{perché } g \text{ è convessa}}} \end{aligned}$$

Oss. Posso dire che $\int_0^1 \dot{u}\dot{v} + \arctan u \cdot v = 0$

purché sappia che

$\rightarrow u$ è soluzione debole di $u'' = \arctan u$
 $u \in H^1$

u ammette derivata debole uguale ad $\arctan u$

$\rightarrow v$ può essere regolare, ma per approx. vale lo stesso anche per $v \in H^1((0,1))$.

Questo dim. che ogni sol. è pto di min. e dim. anche l'unicità, in quanto se non lo fosse $\int \dot{u}^2 = 0$, ma allora...

Unicità stile Analisi 2 Prendiamo più in generale

$$u'' = f(u) \leftarrow \text{monotona strett. crescente}$$

Siano u e v due soluzioni, diciamo in C^2

$$u'' = f(u) \quad (u-v)'' = f(u) - f(v)$$

$$v'' = f(v)$$

Moltiplico per $u-v$ e ottengo

$$\underbrace{(u-v)''}_{w''} \underbrace{(u-v)}_w = (f(u) - f(v)) \cdot (u-v) \geq 0$$

$$0 \leq \int_0^1 w'' w \, dx = \underbrace{[w' w]_0^1}_{=0 \text{ per BC}} - \int_0^1 [w']^2 \, dx \Rightarrow w' = 0$$
$$\Downarrow$$
$$w = \text{cost}$$
$$\Downarrow$$
$$w \equiv 0.$$

— 0 — 0 —

Oss. Derivare sotto il segno di integrale non è gratis

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 g(u+tv) \, dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} g(u+tv) \, dx$$

↑
Se fosse solo $v \in L^2$ potrebbe non essere così scontato.

Quindi meglio prendere $v \in C^0$.