

TEOREMI DI COMPATTEZZA

$$[a,b] \subseteq \mathbb{R}, \quad u_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$

Idea generale: $\left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{qualcosa che controlla } u_n \\ \rightarrow \text{qualcosa che controlla } \dot{u}_n \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_n \rightarrow u_\infty \text{ unif.} \\ \dot{u}_n \rightarrow \dot{u}_\infty \text{ debil.} \end{array}$

Teorema Siano $\{u_n\} \subseteq H^1((a,b))$.

Supponiamo che

$$(i) \exists M_1 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \int_a^b \dot{u}_n(x)^2 dx \leq M_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \exists M_2 \in \mathbb{R} \exists \{x_n\} \subseteq [a,b] \text{ t.c. } |u_n(x_n)| \leq M_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora esiste $n_k \rightarrow +\infty$ ed esiste $u_\infty \in H^1((a,b))$ t.c.

$$u_{n_k} \rightarrow u_\infty \text{ unif.}$$

$$\dot{u}_{n_k} \rightarrow \dot{u}_\infty$$

Dim. Verifichiamo le ipotesi di Ascoli - Arzelà

• Compattezza a x fisso (equiuniformità) $\leadsto$ dopo

• Equicontinuità, anzi equi $\frac{1}{2}$ -Hölder

$$\begin{aligned} |u_n(y) - u_n(x)| &= \left| \int_x^y \dot{u}_n(s) ds \right| \leq \int_x^y |\dot{u}_n(s)| ds \\ &\leq |y-x|^{1/2} \|\dot{u}_n\|_{L^2(x,y)} \\ &\leq |y-x|^{1/2} \cdot (M_1)^{1/2} \end{aligned}$$

Ora posso fare l'equiuniformità

$$|u_m(x)| \leq |u_m(x_m)| + |u_m(x) - u_m(x_m)|$$

$$\leq M_2 + |x - x_m|^{1/2} \cdot (M_1)^{1/2}$$

$$\leq M_2 + |b-a|^{1/2} \cdot (M_1)^{1/2}$$

Per Ascoli-Arzelà esiste $u_{m_k} \rightarrow u_\infty$ unif.

Per di estrarre una s.succ. ulteriore faccio convergere debolmente le derivate

$$u_{m_k} \rightarrow v_\infty \rightsquigarrow v_\infty = u_\infty \text{ per il solito Lemma.}$$

Casi speciali L'ipotesi (ii) può derivare

- da una DBC in un estremo dell'intervallo
- da una condizione integrale, ad esempio

$$\int_a^b u_m(x) dx = \gamma$$

[Per il teo. della media integrale, essendo u_m continua

$$\exists x_m \in [a,b] \text{ t.c. } u_m(x_m) = \frac{1}{b-a} \int_a^b u_m(x) dx = \frac{\gamma}{b-a} \quad \uparrow \text{ fisso}]$$

Teoremi per la semicontinuità

Facile: consideriamo $\int_a^b \psi(x, u_m(x)) dx$

Supponiamo $\psi: [a,b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Supponiamo $u_m(x) \xrightarrow{\text{cont.}} u_\infty(x)$ uniformemente

Allora $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi(x, u_m(x)) dx = \int_a^b \psi(x, u_\infty(x)) dx$

Dim. È un esercizio sulla conv. uniforme far vedere che

$$\psi(x, u_n(x)) \longrightarrow \psi(x, u_\infty(x)) \quad \text{uniformemente}$$

a quel punto è fatta. Serve la uniforme continuità di ψ sui compatti.

Oss. Il teorema è del tutto non ottimale.

Ad esempio, se ψ fosse limitata, basta che

$$u_n(x) \longrightarrow u_\infty(x) \quad \text{puntualmente}$$

(uso conv. dominata di Lebesgue)

Altro esempio, se ψ fosse limitata ma solo SCI, allora potrei avere la SCI dell'integrale per FATOU

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi(x, u_n(x)) dx &\geq \int_a^b \liminf_{n \rightarrow +\infty} \psi(x, u_n(x)) dx \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{FATOU} \\ &\quad \text{(basta lim. dal basso)} \\ &\geq \int_a^b \psi(x, u_\infty(x)) dx \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \psi \text{ SCI} \end{aligned}$$

Meno facile :

$$\int_a^b \psi(V_n(x)) dx$$

Visto : se $V_n(x) \longrightarrow V_\infty(x)$, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b [V_n(x)]^2 dx \geq \int_a^b [V_\infty(x)]^2 dx$$

Dim rifatta nel concreto :

$$\begin{aligned} \int_a^b u_n^2 &= \int_a^b (u_\infty + (u_n - u_\infty))^2 = \int_a^b u_\infty^2 + 2 \int_a^b u_\infty (u_n - u_\infty) + \int_a^b u_n^2 \\ &\quad \text{Ok} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{\substack{\circ \text{ per conv.} \\ \uparrow \text{ debole}}} \geq 0 \end{aligned}$$

Vale lo stesso discorso se ψ è convessa

Dim. barata Parto dalla disuguaglianza

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a)b \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$$

La applico con $a = v_\infty(x)$ e $b = (v_n(x) - v_\infty(x))$.

Otengo

$$\psi(v_n(x)) \geq \psi(v_\infty(x)) + \psi'(v_\infty(x))(v_n(x) - v_\infty(x))$$

Integro

$$\int \psi(v_n) dx \geq \int \psi(v_\infty) + \underbrace{\int \psi'(v_\infty)(v_n - v_\infty)}_{\downarrow 0}$$

Dove ho barato?

- ① Non è detto che $\psi \in C^1$
- ② Posto che $v_n \rightarrow v_\infty$ in L^2 , servirebbe sapere che $\psi'(v_\infty)$ sta in L^2 . Per essere sicuri di questo serve una stima di crescita su ψ' del tipo

$$|\psi'(x)| \leq A + B|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se ho questa, allora

$$\int_a^b |\psi'(v_\infty)|^2 \leq \int_a^b (A + B|v_\infty(x)|)^2 dx \quad \text{e questo è limitato se } v_\infty \in L^2$$

Conclusione: la dimostrazione di sopra è ok se $\psi \in C^1$ e ψ' è sublineare.

Oss. Posso anche includere dipendenza da x , del tipo

$$\int_a^b \psi(x, v(x)) dx$$

per di avere convessità e ipotesi di crescita su $\psi_p(x, p)$

$$\begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \end{array}$$

FUTURO Cosa succede se abbiamo nel tes. di compattezza

$$\int_a^b u_m(x)^8 dx \leq M,$$

$\leadsto$ le u_m sono equi $\frac{7}{8}$ -Hölder, quindi con una ipotesi (ii)

$$u_{m_k} \rightarrow u_\infty \text{ unif}$$

Per quanto riguarda le derivate, mi piacerebbe che

$$\int_a^b v(x) (u_{m_k}(x) - u_\infty(x)) dx \rightarrow 0$$

per una buona classe di $v(x)$

Questo lo posso ottenere quasi gratis per tutte le $v(x)$ che sono caratteristiche di sotto intervalli a estremi in $\mathbb{Q}$.

$$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$$