

[Ogni problema ammette almeno una soluzione, pur di inoltrare abbastanza il concetto di soluzione.

E. De Giorgi]

ESEMPIO MOTIVAZIONALE

$$\min \left\{ \int_0^2 [\dot{u}(x)]^2 + \arctan(u(x)) \, dx : u \in C^1([0,2]) \right. \\ \left. u(0)=0, u(2)=3 \right\}$$

Equazione di Eulero:

$$2u'' = \frac{1}{1+u^2} \quad \leadsto \text{non so risolvere}$$

Metodo diretto : 1 - Formulazione debole

2 - Compattità

3 - Semicontinuità

4 - Regolarità

soluzione
debole



Cerco una nozione di
convergenza per cui
valgano

1 FORMULAZIONE DEBOLE

Estendo

$$F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + \arctan u) \, dx$$

ad un ambiente più grande di $C^1([0,2])$. In questo caso scelgo

$$H^1((0,2)) = W^{1,2}((0,2))$$

Osservo che le condizioni al bordo $u(0)=0$ e $u(2)=3$ hanno senso in H^1 , perché le funzioni H^1 ammettono un rappresentante continuo, che è quello che useremo sempre.

Diverso sarebbe stato con $u'(0)=3$

Considero quindi $F(u)$ definito su

$$X = \{u \in H^1((0,2)) : u(0) = 0, u(2) = 3\}$$

dove ovviamente intendo $\dot{u}$ = derivata debole.

[2] Nozione di convergenza e compattezza.

Prendo un sottolivello:

$$\{u \in X : F(u) \leq M\}$$

Punto fondamentale: dedurre una stima sul gradiente

$$M \geq F(u) = \int_0^2 \dot{u}^2 dx + \underbrace{\int_0^2 \arctan u dx}_{\geq 2 \cdot (-\frac{\pi}{2})} \geq \int_0^2 \dot{u}^2 dx - \pi$$

Quindi

$$\int_0^2 \dot{u}^2 dx \leq M + \pi$$

Se $\{u_m\} \subseteq X$ con $F(u_m) \leq M$, allora $\|\dot{u}_m\|_{L^2}^2 \leq M + \pi$
quindi posso estrarne una s.succ. debolmente convergente

$$\dot{u}_{m_k} \rightharpoonup v_\infty$$

Vorrei far convergere pure le funzioni in qualche senso.

[Come far convergere funzioni e derivate insieme. Ci sono solo 2 casi in cui non funziona

① $u_m(x) \equiv m$

Derivate ok, funzione scappa

② $u_m(x) = \sin(mx)$

Funzione limitata, derivata scappa

Se voglio la convergenza, servono ipotesi per controllare funzioni e derivate]

Qui controllo le funzioni grazie alle BC

$$|u_m(x) - u_m(0)| \leq \|\dot{u}_m\|_{L^2} \cdot \sqrt{x}$$

da cui $|u_m(x)| \leq \sqrt{2} \|\dot{u}_m\|_{L^2}$
 $\uparrow$
ampiezza intervallo

Conclusione: le $u_m(x)$ in un qualunque sottolivello sono equilimitate + continue

Ascoli - Arzelà $\Rightarrow$ a meno di s.succ. $u_{m_k}(x) \rightarrow u_\infty(x)$ unif.

Oss. ① Posso trovare una stessa s.succ. t.c.

$$\begin{array}{ccc} u_{m_k}(x) & \longrightarrow & u_\infty(x) \text{ unif.} \\ \dot{u}_{m_k}(x) & \longrightarrow & v_\infty(x) \text{ debolmente} \end{array}$$

$\uparrow$
② Teorema già visto: $v_\infty(x) = \dot{u}_\infty(x)$
(basterebbero 2 deboli)

Nozione di conv. wrt abbiamo compattezza dei s.livelli $\uparrow$

③ Semicontinuità: serve che

$$\left. \begin{array}{l} u_m \rightarrow u_\infty \text{ unif.} \\ \dot{u}_m \rightarrow \dot{u}_\infty \text{ debolm.} \end{array} \right\} \Rightarrow \liminf_{m \rightarrow +\infty} F(u_m) \geq F(u_\infty)$$

$$F(u_m) = \underbrace{\int_0^2 \dot{u}_m^2 dx}_{\|\dot{u}_m\|_{L^2}^2} + \underbrace{\int_0^2 \arctan u_m dx}_{u_m \rightarrow u_\infty \text{ unif.} \Rightarrow \arctan u_m \rightarrow \arctan u_\infty \text{ unif.} \Rightarrow \text{passo al limite negli integrali}}$$

$\|\dot{u}_m\|_{L^2}^2$
e la norma è
SCI
wrt debole

$$\int_0^2 \arctan u_\infty dx$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \liminf \int_0^2 \dot{u}_n^2 dx + \lim \int_0^2 \arctan u_n dx \\ \geq \int_0^2 \dot{u}_\infty^2 dx + \int_0^2 \arctan u_\infty dx = F(u_\infty)$$

Devo solo verificare che $u_\infty \in X$, cioè rispetta le B.C.

Questo segue ancora una volta dalla conv. unif., anzi basterebbe puntuale

$$u_n(0) = 0$$



$$u_\infty(0) = 0$$

$$u_n(2) = 3$$



$$u_\infty(2) = 3$$

Ora esiste $\min \{ F(u) : u \in X \}$

④ Regolarità : dimostrare che $u \in C^1([0,2])$, anzi C^∞ .

Si tratta di fare l'eq. di Eulero in H^1 come si faceva in C^1 .

Sia u un pto di minimo in X .

Prendo $v \in C^1([0,2])$ con $v(0) = v(2) = 0$

$$\varphi(t) := F(u+tv) = \int_0^2 [(\dot{u}+t\dot{v})^2 + \arctan(u+tv)] dx \\ = \int_0^2 \dot{u}^2 + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2 + \arctan(u+tv) dx$$

$$\varphi'(t) = 2 \int_0^2 \dot{u}\dot{v} + 2t \int_0^2 \dot{v}^2 + \int_0^2 \frac{1}{1+(u+tv)^2} v dx$$

ho supposto di poter derivare sotto il segno di integrale

$$0 = \varphi'(0) = 2 \int_0^2 \dot{u}\dot{v} + \int_0^2 \frac{v}{1+u^2}$$

Eulero prima forma

$$\text{cioè} \quad 2 \int_0^2 \underbrace{\dot{u}\dot{v}}_{\neq} dx = - \int_0^2 \underbrace{\frac{1}{1+u^2}}_g v dx$$

$\forall v \in C^1$
nulla al bordo

$\Rightarrow f$ è derivabile debolmente e $\dot{f} = g$

$\Rightarrow u$ è derivabile debolmente e $2(u')' = + \underbrace{\frac{1}{1+u^2}}_{\text{continua}}$

Ma allora $(u')'$ è continua, quindi u è C^1
(Lemma: se $f' \in C^0 \Rightarrow f \in C^1$), quindi $u \in C^2$
e risolve Eulero in senso classico

$$2u''(x) = \frac{1}{1+u(x)^2} \quad \forall x \in [0, 2]$$

$\uparrow$
derivata VERA

BOOTSTRAP $\Rightarrow u \in C^\infty([0, 2])$

(Per induzione: $u \in C^k \Rightarrow u'' = \text{RHS} \in C^k \Rightarrow u \in C^{k+2}$)

— o — o —