

Teorema Le funzioni $W^{1,2}([a,b])$ sono $\frac{1}{2}$ -Hölderiane
 $C^{0,1/2}([a,b])$

Dim. Sia $f \in W^{1,2}$ e sia g la sua derivata debole.
 Sia $a \leq x < y \leq b$. Allora

$$\begin{aligned}
 |f(y) - f(x)| &= \left| \int_x^y g(s) ds \right| \leq \int_x^y |g(s)| ds \\
 &= \int_a^b |g(s)| \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{[x,y]}(s)}_{\substack{\text{caratteristica (0/1)} \\ \text{di } [x,y]}} ds \leq \left[\int_a^b g^2(s) ds \right]^{1/2} \cdot \left[\int_a^b \mathbb{1}_{[x,y]}^2 ds \right]^{1/2} \\
 &= \|g\|_{L^2} \cdot |y-x|^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Ho dimostrato che $\|g\|_{L^2}$ va bene come costante di Hölder.

Analogo Le funzioni $W^{1,p}$ sono $C^{0,1/p}([a,b])$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Dim. Come prima

$$|f(y) - f(x)| = \int_a^b \underbrace{|g(s)|}_{\in L^p} \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{[x,y]}(s)}_{\in L^q} ds \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|g\|_{L^p} |y-x|^{1/q}.$$

Oss. Le funzioni $W^{1,p}$ sono CONTINUE. Detto meglio: data $f(x) \in W^{1,p}([a,b])$ esiste $\hat{f}(x) \in C^0([a,b])$ t.c.

$$f(x) = \hat{f}(x) \quad \text{per ogni } x \in [a,b] \setminus E$$

$\uparrow$
 $\text{meas}(E) = 0.$

La Heaviside 0/1 è continua quasi ovunque, ma non coincide q.o. con una continua.

Ripasso : teorema di ASCOLI-ARZELÀ

Caso base : Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ (con estremi) e siano $f_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
Supponiamo che

- (i) per ogni $x \in [a,b]$ la successione $\{f_n(x)\}$ è tale che ogni sottosuccessione ammette s.s. succ. convergenti,
- (ii) $f_n(x)$ è equicontinua, cioè $\forall x \in [a,b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che

$$|y-x| \leq \delta, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

Allora esiste una s.succ. convergente UNIFORMEMENTE, cioè esiste $n_k \rightarrow +\infty$ ed esiste $f_\infty: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f_\infty(x) \text{ unif. in } [a,b].$$

Caso più generale Sia X un metrico compatto, siano $f_n: X \rightarrow Y$ con Y metrico completo.

Supponiamo che valgano le ipotesi come sopra

- (i) la chiusura di $\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ è compatto per ogni $x \in X$
- (ii) equicontinuità

Allora esiste s.succ. conv. unif. in X

Oss. Se X non è compatto, ma unione numerabile di compatti, allora con le stesse ipotesi la tesi diventa esiste una s.succ. che converge unif. sui compatti.

Back to definizione (H) Supponiamo che $f_n \rightarrow f_\infty$ in L^2
 $f_n' \rightarrow g_\infty$ in L^2

Dico che le $f_n(x)$ soddisfanno le ipotesi di A.A.

Infatti

$\rightarrow f_n' \rightarrow g_\infty$ in $L^2 \Rightarrow \|f_n'\|_{L^2}$ sono equilimitate, ma allora tutte le f_n sono $\frac{1}{2}$ -Hölder con una costante comune

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq \|f_n'\|_{L^2} |y-x|^{1/2} \quad \forall (x,y) \in [a,b]^2$$

$\Rightarrow$ sono equi-continue

→ Dico che esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a,b]$
 $\forall n \in \mathbb{N}$

da cui segue l'hp ci) di A.A.

Se $f_n \rightarrow f_\infty$, allora le norme $\|f_n\|_{L^2}$ sono equivate, quindi

$$\int_a^b |f_n(x)|^2 dx \leq k$$

Ma allora per il te. della media integrale (qui va bene perché) le $f_n(x)$ sono continue sappiamo che $\exists x_n \in [a,b]$ t.c.

$$k \geq \int_a^b |f_n(x)|^2 dx = (b-a) |f_n(x_n)|^2$$

Ma allora $|f_n(x_n)| \leq \left(\frac{k}{b-a}\right)^{1/2}$

Usando l'Hölderianità ottengo

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |f_n(x_n) + f_n(x) - f_n(x_n)| \\ &\leq \underbrace{|f_n(x_n)|}_{\leq \left(\frac{k}{b-a}\right)^{1/2}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_n)|}_{\leq H|x-x_n|^{1/2} \leq H|b-a|^{1/2}} \end{aligned}$$

Ma allora a meno di sottosucc. $f_n(x) \rightarrow \hat{f}_\infty(x)$ uniformemente, ma allora $\hat{f}_\infty(x)$ è continua.

Ma allora

$$\begin{aligned} f_n(x) &\rightarrow \hat{f}_\infty(x) \\ f_n(x) &\rightarrow f_\infty(x) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{sono uguali} \\ \text{unif.} \\ L^2 \end{array}$$

Quindi in particolare $f_\infty(x)$ è continua.

— o — o —

Teorema

$$W \subseteq H$$

Idea della dim.

Data una $f(x) \in L^p$ con deriv. deb. $g(x) \in L^p$ devo trovare funzioni $f_n(x) \in C^1$ t.c.

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{in } L^p$$

$$f_n'(x) \rightarrow g(x) \quad \text{in } L^p$$

Approssimo $g(x)$ con funzioni continue o C^∞ e faccio vedere che vanno bene come $f_n'(x)$.

— o — o —

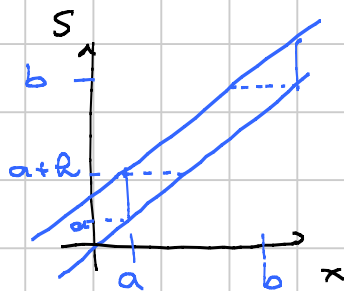
Esercizio La derivata debole è il limite in qualche senso del rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = R_h(x) \quad \text{Cosa posso dire di } R_h(x)?$$

$$R_h(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(s) ds \quad \text{Quindi}$$

$$|R_h(x)| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |g(s)| ds \leq \frac{1}{h} \sqrt{h} \left[\int_x^{x+h} |g(s)|^2 ds \right]^{1/2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{h}} \left[\int_x^{x+h} |g(s)|^2 ds \right]^{1/2}$$

$$\int_a^b |R_h(x)|^2 dx \leq \frac{1}{h} \int_a^b \left[\int_x^{x+h} |g(s)|^2 ds \right] dx$$



Invertendo l'ordine di integrazione ottengo che è $\leq$ costante (bisogna spezzarlo in 3 parti)

Morale $\|R_h(x)\|_{L^2}$ sono equivanenti $\Rightarrow$ esiste s.succ. che converge debolmente a qualcosa

$\Rightarrow$ il qualcosa è la derivata debole.

— o — o —