

Derivate deboli e spazi di Sobolev

Def. (W) Sia $f \in L^1((a,b))$ e sia $g \in L^1((a,b))$.

Si dice che g è la derivata debole di f se

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b g(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$$

Def. (H) Siano f e g come sopra.

Si dice che g è la derivata debole di f se esiste una successione

$$f_n \in C^\infty([a,b])$$

tale che

- $f_n \rightarrow f$ in $L^1((a,b))$, $L^p((a,b))$
 - $f_n' \rightarrow g$ in $L^1((a,b))$, $L^p((a,b))$
- ↑
funzioni e derivate vere

Def Si dice che $f \in W^{1,p}((a,b))$ se $f \in L^p((a,b))$ e la sua derivata debole $g \in L^p((a,b))$.

Si dice che $f \in H^{1,p}((a,b))$ se vale come nella def. (H) con convergenza in $L^p((a,b))$.

Oss. La definizione H è equivalente alla seguente: considero l'insieme $X = C^1([a,b])$ oppure $C^\infty([a,b])$ e considero in X la distanza:

$$\text{dist}(f, g) = \|f - g\|_{L^p} + \|f' - g'\|_{L^p}$$

Posso definire $H^{1,p}$ come il completamento di X wrt alla distanza appena introdotta.

Notazione H^k è sinonimo di $H^{k,2}$ o $W^{k,2}$

Esempio 1 $f(x) = |x| + 3$ sta in $H^{1,p}((-2,2))$ per ogni p .

Verifica W Dico che la sua derivata debole è

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) \varphi'(x) dx &= \int_{-2}^0 (-x+3) \varphi'(x) dx + \int_0^2 (x+3) \varphi'(x) dx \\ &= [(-x+3) \varphi(x)]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 (-1) \varphi(x) dx \\ &\quad + [(x+3) \varphi(x)]_0^2 - \int_0^2 1 \varphi(x) dx \\ &= 3\cancel{\varphi(0)} - 3\cancel{\varphi(0)} - \int_{-2}^2 g(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty((-2,2))$$

Verifica (H) Devo approssimare $|x| + 3$ con funzioni C^1 o C^∞ in maniera che $f_n \rightarrow f$ e $f_n' \rightarrow g$

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}. \text{ Verifiche per esercizio.}$$

Esercizio Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Dico che $f \notin W^{1,p}((-2,2))$ per ogni $p > 1$.

Formalismo (W): supponiamo $\exists g \in L^1((-2,2))$ t.c.

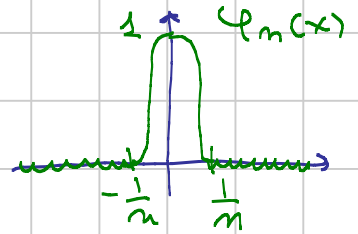
$$\int_{-2}^2 f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-2}^2 g(x) \varphi(x) dx$$

$$\int_{-2}^2 f(x) \varphi'(x) dx = \int_0^2 \varphi'(x) dx = \varphi(2) - \varphi(0) = -\varphi(0)$$

Allora dovrebbe accadere che

$$\int_{-2}^2 g(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty((-2, 2))$$

Me la gioco con una succ. $\varphi_n(x)$ fatta così



Allora RHS = 1 fisso, mentre LHS $\rightarrow 0$ per convergenza dominata.

Esercizio $W^{k,p}$ e $H^{k,p}$ sono spazi vettoriali e la derivata debole è un' applicazione lineare.

Derivata del prodotto Se $f \in W^{1,p}$ e $g \in W^{1,p}$, allora

$$f \cdot g \in W^{1,p} \quad \text{e} \quad (f \cdot g)' = f'g + f g'$$

Questo è per nulla ovvio in def. (W) e molto più semplice in def. (H).

— o — o —

Teorema $H \subseteq W$

Dim. Sia $f_n(x)$ una succ. di funzioni $C^1((a,b))$ tali che

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{in } L^1((a,b)) \quad f_n'(x) \rightarrow g(x) \quad \text{in } L^1((a,b))$$

Dico che $g(x)$ è la derivata debole di $f(x)$ nel senso W.

Per le $f_n(x)$ vale la vera integrazione per parti:

$$\int_a^b f'_n(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b f_n(x) \varphi'(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b g(x) \varphi(x) dx$$

— 0 — 0 —

Lemma Sia $\{f_n(x)\} \subseteq W^{1,2}((a,b))$
 e siano $f'_n(x)$ le rispettive derivate deboli
 Supponiamo che

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ in } L^2((a,b)) \quad f'_n \rightarrow g_\infty \text{ in } L^2((a,b))$$

Allora $f_\infty \in W^{1,2}((a,b))$ e $g_\infty = f'_\infty$.

Dim. Sopra ho usato solo la convergenza debole.

Teorema Le funzioni in $W^{1,p}((a,b))$ sono l'integrale della propria derivata.

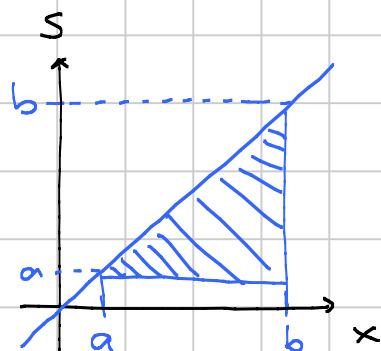
Dim. (W) Sia $g(x)$ la derivata debole di $f(x)$. Pongo

$$G(x) := \int_a^x g(s) ds \quad (\text{la "primitiva" di } g(x))$$

Calcolo

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi'(x) G(x) dx &= \int_a^b \varphi'(x) \int_a^x g(s) ds dx \\ &= \int_a^b \int_a^x \varphi'(x) g(s) ds dx \\ &= \int_a^b ds \int_s^b dx \varphi'(x) g(s) \end{aligned}$$

(Fubini-Tonelli)



$$= \int_a^b g(s) ds \underbrace{\int_s^b \varphi'(x) dx}_{\varphi(b) - \varphi(s)} = - \int_a^b g(s) \varphi(s) dx$$

$$= - \varphi(s)$$

Ho quindi dim. che

$$\int_a^b G(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b g(x) \varphi(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx$$

Quindi applicando DBR in versione L^1 deduco che

$$f(x) = \underbrace{\text{costante}}_0 + \underbrace{G(x)}_0$$

In particolare potremo scrivere

$$f(x) - f(y) = \underbrace{\int_y^x g(s) ds}_0$$

Corollario Se g è la derivata debole di f e g è continua, allora $f \in C^1$ e g è la "vera" derivata

Dim senza teorema

Chiamo G la primitiva di g e ragiono come nella dim. del teorema senza bisogno di passare dall'integrale doppio.

$$\underbrace{\quad}_0 \underbrace{\quad}_0 \underbrace{\quad}_0$$