

Misura di Lebesgue → **BEppo-LEVI** (convergenza MONOTONA)
 → FATOU
 → convergenza DOMINATA

Teorema di LEBESGUE Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (anche $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) integrabile secondo Lebesgue sui compatti ($L^1_{loc}(\mathbb{R})$), allora esiste $E \subseteq \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}^n$) di misura nulla tale che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{meas}(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y) dy = f(x)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

↑
 dunque in particolare
 il limite esiste
 per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

— o — o —

Spazi di LEBESGUE L^p

Dato un intervallo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ e dato $p \geq 1$ si pone

$$L^p((a, b)) := \left\{ f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

Più precisamente bisogna quotientare per la relazione di equivalenza

$$f \sim g \Leftrightarrow \text{meas} \{ x \in (a, b) : f(x) \neq g(x) \} = 0$$

OS. Si possono definire analogamente spazi a partire da una funzione data $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ imponendo

$$\int_a^b \varphi(f(x)) dx < +\infty$$

Esercizio Capire quali proprietà di φ garantiscono le proprietà tipiche degli spazi L^p , ad esempio

1: essere uno spazio vettoriale

2: il fatto che

$$\varphi \rightarrow \left[\int_a^b |\varphi(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

è una norma

3: completezza, ← entra in gioco la misura di LEBESGUE.

Disuguaglianza di Hölder

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \in L^p(a,b) \\ g \in L^q(a,b) \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi g \in L^1(a,b) \text{ e } \|\varphi g\|_{L^1} \leq \|\varphi\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

Più in generale: se ho $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ con $\varphi_k \in L^{p_k}(a,b)$ e

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{r}, \text{ allora } \varphi_1 \dots \varphi_m \in L^r \text{ e vale}$$

$$\|\varphi_1 \dots \varphi_m\|_{L^r} \leq \|\varphi_1\|_{L^{p_1}} \dots \|\varphi_m\|_{L^{p_m}}$$

(stessa dim. del caso $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Caso $p=2$ $L^2(a,b)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$\langle \varphi, g \rangle := \int_a^b \varphi(x) g(x) dx$$

e la Hölder con $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ è proprio Cauchy - Schwarz.

È separabile: un sottoinsieme denso sono le comb. lin. finite a coeff. in $\mathbb{Q}$ delle funzioni caratteristiche di intervalli con estremi in $\mathbb{Q}$.

DERIVATE DEBOLI E SPAZI DI SOBOLEV

→ Definizione W

→ Definizione H

Definizione W

Def. Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (integrabile localmente secondo Lebesgue)

Dico che $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ è la derivata debole di f se

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) v'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} g(x) v(x) dx \quad \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

Def. Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}((a,b))$ è l'insieme delle

der. prima
↓
sommabilità

$f \in L^p((a,b))$ la cui derivata debole $g \in L^p((a,b))$.

Oss. Gli integrali nella definizione sono integrali su un intervallo, quindi sono ben definiti.

Oss. Se $f \in C^1(\mathbb{R})$, allora vale la formula di sopra pur di prendere $g = f'$: è l'integrazione per parti, senza bordo perché v è nulla al "bordo".

Lemma La derivata debole, posto che esista, è UNICA.

Dim. Supponiamo che $g_1(x)$ e $g_2(x)$ siano derivate deboli di una stessa $f(x)$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} g_1(x) v(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) v'(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g_2(x) v(x) dx$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}} [g_1(x) - g_2(x)] v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty((a,b))$$

Vorrei tanto poter usare il FLCV in versione Lebesgue.

Lemma (FLCV in versione Lebesgue) Sia $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ t.c.

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Allora $g(x) = 0$ a meno di insiemi di misura nulla.

Dim. Non posso dire che wlog esiste un intervallo in cui $g(x) \geq a > 0$.

Ci sono 2 vie di uscita, entrambe passano per dire che la relazione vale per ogni $v(x)$ caratteristica di intervallo

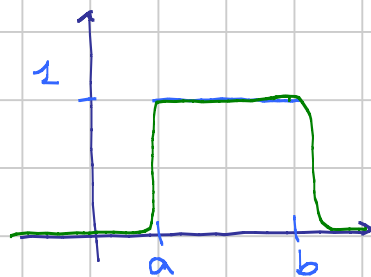
Dato un intervallo (a,b) esiste $\{v_m\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che

(i) $0 \leq v_m(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

(ii) $v_m(x) \rightarrow I_{(a,b)}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$\uparrow$ $\uparrow$
caratteristica (0/1)

conv. puntuale



Questo basta per concludere che

$$v_m(x) g(x) \rightarrow \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in (a,b) \\ 0 & \text{se } x \notin (a,b) \end{cases}$$

$\uparrow$
puntuale

inoltre $|v_m(x) g(x)| \leq |g(x)|$ e questo basta per la convergenza dominata

$$0 = \int_{\mathbb{R}} v_m(x) g(x) dx \rightarrow \int_a^b g(x) dx = 0$$

Ora diciamo con Lebesgue e ho che per quasi ogni x :

$$g(x) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} g(y) dy = 0$$

Lebesgue. 0 (media integrale su intervallo)

Esercizio Dimostrare FLCV a media nulla in versione Lebesgue.

Oss. Alternativa per la dim. di FLCV in versione Lebesgue: dimostrare per approssimazione che se vale la relazione per ogni $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, allora vale per ogni $v \in L^1$ e concludere prendendo $v = g$.