

Spazi di Hilbert e basi Hilbertiane che permettono di lavorare in un Hilbert H separabile con le componenti come in $\mathbb{R}^n$.

$$H \ni v = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \quad c_n = \langle v, e_n \rangle$$

$\uparrow$ compon. $\uparrow$ base

$$w = \sum b_n e_n \quad \langle v, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n \quad |v|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

Def. Si definisce l^2 l'insieme delle successioni $\{u_n\}$ di reali t.c.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < +\infty \quad (\text{quadrato sommabili})$$

con prodotto scalare definito in modo ovvio

$$\langle \{u_n\}, \{v_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$$

Teorema (dell'altra volta) Tutti gli spazi di Hilbert separabili sono (isomorfi a) $\mathbb{R}^n$ oppure l^2 ($\mathbb{R}^\infty$).

Nozioni di convergenza:

$$\textcircled{1} H \ni v_n \rightarrow v_\infty \quad \text{e} \quad \|v_n - v_\infty\| \rightarrow 0$$

$$\textcircled{2} H \ni v_n \rightarrow v_\infty \quad \text{se} \quad \langle v_n, w \rangle \rightarrow \langle v_\infty, w \rangle \quad \forall w \in H$$

Oss. Se $u_m \rightarrow u_\infty$, allora $\langle u_m, e_k \rangle \rightarrow \langle u_\infty, e_k \rangle$
 $\downarrow$
 k -esima componente

Domanda: per dimostrare che $u_m \rightarrow u_\infty$, devo proprio usare tutti i $w \in H$?

Proposizione Sia $\{u_m\} \subseteq H$ una succ., sia $u_\infty \in H$, sia $W \subseteq H$ un sottoinsieme DENS0.

Supponiamo che

(i) $\langle u_m, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle$ per ogni $w \in W$

(ii) u_m è limitata, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\|u_m\| \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Allora

$$u_m \rightarrow u_\infty$$

Oss. Sarebbe davvero la limitatezza? Sì, perché basta considerare la succ. $\{ue_m\} = \{u_m\}$
 È evidente che

$$\langle u_m, w \rangle \rightarrow 0$$

per ogni w che ha un numero finito di componenti.

D'altra parte $u_m \not\rightarrow 0$. Questo si può vedere in 2 modi:

① Pongo

$$w := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \quad (\text{converge perché } \sum \frac{1}{n^2} < +\infty)$$

e osservo che $\langle u_m, w \rangle = 1 \rightarrow 0$

② Usare che $u_m \rightarrow \text{q.c.} \Rightarrow \|u_m\|$ limitata.

Dim. Devo dimostrare che

$$\langle u_n, w \rangle \longrightarrow \langle u_\infty, w \rangle \quad \forall w \in H$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per la densità di W trovo $w_\varepsilon \in W$ t.c.

$$\|w - w_\varepsilon\| \leq \varepsilon$$

Ora

$$\begin{aligned} |\langle u_n, w \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| &\leq |\langle u_n, w \rangle - \langle u_n, w_\varepsilon \rangle| + & (1) \\ &+ |\langle u_n, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle| & (2) \\ &+ |\langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| & (3) \end{aligned}$$

Stimo i 3 pezzi

$$\begin{aligned} (1) \quad |\langle u_n, w \rangle - \langle u_n, w_\varepsilon \rangle| &= |\langle u_n, w - w_\varepsilon \rangle| \\ &\stackrel{\text{c.s.}}{\leq} \|u_n\| \cdot \|w - w_\varepsilon\| \\ &\leq \varepsilon M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad |\langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| &= |\langle u_\infty, w_\varepsilon - w \rangle| \\ &\leq \|u_\infty\| \cdot \|w_\varepsilon - w\| \\ &\leq \varepsilon \|u_\infty\| \end{aligned}$$

Quindi

$$|\langle u_n, w \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| \leq \underbrace{|\langle u_n, w_\varepsilon \rangle - \langle u_\infty, w_\varepsilon \rangle|}_{\downarrow \text{ perché } w_\varepsilon \in W} + \varepsilon M + \varepsilon \|u_\infty\|$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{LHS} \leq \varepsilon M + \varepsilon \|u_\infty\|$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario ho finito.

Oss. Nella proposizione posso sostituire $W \subseteq H$ denso con $W \subseteq H$ tale che $\text{Span}(W)$ è denso. In particolare se $\{u_n\}$ è LIMITATA basta testare $\langle u_n, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle$ con w base Hilbertiana di H .

Fatto importante Una successione u_n limitata tende debolmente a u_∞ se e solo se le componenti di u_n tendono (come numeri) alle componenti di u_∞ .

Teorema In uno spazio di Hilbert separabile le palle sono debolmente compatte, cioè ogni successione $\{u_n\}$ limitata ammette una s. succ. conv. DEBOLMENTE.

Dim. Data $\{u_m\}$ basta trovare $u_\infty \in H$ e $n_k \rightarrow +\infty$ t.c.

$$\langle U_{m_k}, e_i \rangle \rightarrow \langle U_\infty, e_i \rangle \quad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}$$

Ossemo che per ogni $i \in \mathbb{N}$ la successione di numeri $\langle v_n, e_i \rangle$ è limitata (c.s.). Allora faccio il solito procedimento di agguale cioè

→ estraggo s. succ. in modo t.c. $\langle U_m, e_1 \rangle \rightarrow \alpha_1$

→ estraggo dalla precedente s. succ. t.c. $\langle U_m, e_2 \rangle \rightarrow \alpha_2$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

concludo diagonalmente. Così trovo una s.succ. M_k t.c.

$$\langle \sigma_{3_k}, e_i \rangle \rightarrow \alpha_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Ora vorrei tanto porre $U_\infty := \sum_{i=1}^{\infty} d_i e_i$ e concludere

Per far questo serve sapere PRIMA che $\sum_{i=0}^4 x_i^2 < +\infty$

Basta che dim. che le somme parziali sono EQUILIMITATE

$$\sum_{i=0}^m d_i^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \langle v_{m_k}, e_i \rangle^2 \leq M^2$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 somma finita $\leq \|v_{m_k}\|^2$

10101

Teorema (SCI della norma wrt alla convergenza debole)

Se $u_m \rightarrow u_\infty$ in H , allora $\liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\| \geq \|u_\infty\|$

Dim.

$$\begin{aligned}\|u_m\|^2 &= \|u_\infty + (u_m - u_\infty)\|^2 \\&= \|u_\infty\|^2 + 2 \langle u_\infty, u_m - u_\infty \rangle + \|u_m - u_\infty\|^2 \\&\geq \|u_\infty\|^2 + 2 \underbrace{(\langle u_\infty, u_m \rangle - \langle u_\infty, u_\infty \rangle)}_{\downarrow 0 \text{ (prod. scalare con quantità fissa)}}\end{aligned}$$

Basta ora fare $\liminf$ al RHS e LHS

— 0 — 0 —

Achtung! Da non fare mai: se $u_m \rightarrow u_\infty$

$$\begin{aligned}\|u_m\|^2 &= \langle u_m, e_1 \rangle^2 + \langle u_m, e_2 \rangle^2 + \dots + \langle u_m, e_i \rangle^2 + \dots \\&\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\&\quad \langle u_\infty, e_1 \rangle^2 + \langle u_\infty, e_2 \rangle^2 + \dots + \langle u_\infty, e_i \rangle^2 + \dots \\&= \|u_\infty\|^2\end{aligned}$$

NON SI SCAMBIANO SOMME INFINITE CON I LIMIT!

— 0 — 0 —