

Calcolo delle Variazioni - LEZIONE 10

Titolo nota

09/10/2015

BASI HILBERTIANE

Serie a valori in uno spazio Hilbert / Banach H

Data una succ. $\{u_n\} \subseteq H$, dico che $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S_{\infty}$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n u_k}_{S_n = \text{somma parziale}} = S_{\infty}$$

Proposizione Se $\{u_n\} \subseteq H$ Banach, allora vale l'implicazione

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < +\infty}_{\text{serie di numeri}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ converge}}_{\text{serie di vettori}}$$

CONVERG. TOTALE

Dim. Sia $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\hat{S}_n = |u_0| + \dots + |u_n|$$

$$\text{Allora } |S_n - S_m| = \underbrace{|u_{m+1} + \dots + u_n|}_{n > m} \leq |u_{m+1}| + \dots + |u_n| = \hat{S}_n - \hat{S}_m$$

$$\sum |u_n| < +\infty \Rightarrow \hat{S}_n \text{ succ. di Cauchy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n \text{ succ. di Cauchy in } H \Rightarrow S_n \text{ converge. } \square$$

Oss. La classica conv. totale è il risultato precedente in

$C^0([a, b])$ con la norma del sup.

Base algebrica È un sottoinsieme $B \subseteq H$ tale che ogni $v \in H$ è comb. lin. finita di el. di B

$\forall v \in H \exists m \in \mathbb{N} \exists v_1, \dots, v_m \in B \exists c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$$

Teorema (che non servirà) In ogni Banach esiste una base algebrica ed è sempre

→ o finita

→ o più che numerabile.

} Serve il lemma di BAIRE
o equiv. BS

Oss. I polinomi $\mathbb{R}[x]$ non possono diventare un Banach.

Basi Hilbertiane Sia H uno sp. di Hilbert.

Una base Hilbertiana è un sottoinsieme $B \subseteq H$ con queste proprietà

(1) ORTONORMALE $\langle v, w \rangle = 0$ se $v \neq w$ $v, w \in B$
 $|v| = 1$ per ogni $v \in B$

(2) "GENERANO H " ogni vettore $v \in H$ si scrive nella forma

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n$$

per opportuni vettori $v_1, \dots, v_n, \dots \in B$

" " coeff. $c_1, \dots, c_n, \dots \in \mathbb{R}$

Teorema (Molto generale) In ogni Hilbert esiste almeno una base Hilbertiana.

Def. Uno spazio di Hilbert H si dice SEPARABILE se esiste un sottoinsieme denso numerabile

Teorema In ogni Hilbert separabile esiste una base Hilbertiana finita o numerabile.

Dim. Idea: $\rightarrow$ dal denso $\{d_n\}$ numerabile costruiamo una sottosucc. $\{d_{n_k}\}$ di el. lin. indep con

$$\text{Span}(d_{n_1}, \dots, d_{n_k}) = \text{Span}(d_1, d_2, \dots, d_{n_k})$$

$\rightarrow$ ortonormalizzo con Gram-Schmidt
i d_{n_k}

$\rightarrow$ verifico che si tratta di una base Hilbertiana
— o — o —

Proposizione Sia $\{v_n\}$ una base Hilbertiana in uno spazio H .
Sia $\{c_n\}$ una suce. di numeri reali.

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n v_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < +\infty$$

Inoltre se la serie converge a v_∞ , allora $|v_\infty|^2 = \sum c_n^2$

Dim Esercizio
— o — o —

Oss. Negli spazi di Hilbert di dimensione infinita le palle non sono compatte.

Dim. Considero una base $\{e_n\}$. Allora $\text{dist}(e_i, e_j) = \sqrt{2}$
 $\uparrow$
o in generale un sottoinsieme numerabile di una base quindi $\{e_n\}$ non è di Cauchy.
per ogni $i \neq j$

Def. Si dice che $x_n \rightarrow x_\infty$ (FORTE) se $\|x_n - x_\infty\| \rightarrow 0$

Def. (convergenza debole) Si dice che $x_n \rightarrow x_\infty$ (DEBOLE) se

$$\langle x_n, v \rangle \xrightarrow[\text{numeri}]{\quad} \langle x_\infty, v \rangle \quad \forall v \in H$$

Proprietà banali

(1) Se $u_n \rightarrow u_\infty$ e $w_n \rightarrow w_\infty$, allora

$$u_n + w_n \rightarrow u_\infty + w_\infty$$

(2) Se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora

$$\lambda u_n \rightarrow \lambda u_\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(3) Se $u_n \rightarrow u_\infty$, allora $u_n \rightarrow u_\infty$

(4) Se $u_n \rightarrow u_\infty$ e $w_n \rightarrow w_\infty$, allora
e $\{u_n\}$ è limitata

$$\langle u_n, w_n \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w_\infty \rangle$$

(5) Se $u_n \rightarrow u_\infty$ e $w_n \rightarrow w_\infty$ **NON** è detto che
 $\langle u_n, w_n \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w_\infty \rangle$

Dim. (i) + (ii) Banale esercizio

(iii) Ipotesi $u_n \rightarrow u_\infty$

Terzi $u_n \rightarrow u_\infty$, cioè $\langle u_n, w \rangle \rightarrow \langle u_\infty, w \rangle$
per ogni $w \in H$

$$|\langle u_n, w \rangle - \langle u_\infty, w \rangle| = |\langle u_n - u_\infty, w \rangle|$$
$$\leq \underset{\text{c.s.}}{\uparrow} \|u_n - u_\infty\| \cdot \underset{0}{\downarrow} \|w\| \rightarrow 0$$

$$(iv) |\langle u_n, w_n \rangle - \langle u_\infty, w_\infty \rangle|$$

$$\leq \underbrace{|\langle u_n, w_n \rangle - \langle u_n, w_\infty \rangle|}_{\leq \|u_n\| \cdot \|w_n - w_\infty\|} + \underbrace{|\langle u_n, w_\infty \rangle - \langle u_\infty, w_\infty \rangle|}_{\downarrow 0}$$

$$\leq \|u_n\| \cdot \|w_n - w_\infty\|$$

$\downarrow$
se fosse limitato
avrei finito

$\downarrow$
per definizione di
conv. debole

(5) Controesempio in dimensione infinita

$$v_n = e_n$$

$$w_n = e_n$$

$$\langle e_n, e_n \rangle \rightarrow 1 \text{ MA } e_n \rightarrow 0$$

Fatto Se $\{e_n\}$ è una base Hilbertiana, allora $e_n \rightarrow 0$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n, \text{ allora } \langle v, e_n \rangle = c_n \rightarrow 0$$

perché la serie converge.

Teorema (Vero, ma che non useremo MA1)

Sia H un Hilbert. Allora le successioni che convergono debolmente sono limitate, cioè

$$v_n \rightarrow v_\infty \Rightarrow \exists M \text{ t.c. } |v_n| \leq M \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Idea per una dimostrazione: se $|v_n|$ non sono limitate, trovare $w \in H$ t.c. $\langle v_n, w \rangle$ non abbia limite reale

Dim ufficiale (Idea) Per ipotesi sappiamo che

$\forall w \in H$ la succ. $\langle v_n, w \rangle$ ha limite, quindi è limitata.

Pongo $H_k := \{w \in H : |\langle v_n, w \rangle| \leq k\}$

Ma allora $H = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$ e non è difficile vedere che gli H_k sono chiusi.

Baire $\Rightarrow$ uno degli H_k ha parte interna $\neq \emptyset$.

A questo p.to segue ... che $|\langle v_n, w \rangle| \leq \text{costante} \quad \forall |w| \leq 1$
e da questo segue che $|v_n| \leq \text{costante}$.

— o — o —