

**METODO DIRETTO**

Per dimostrare che  $\min \{f(x) : x \in X\}$  ESISTE.

$X \rightarrow$  insieme

$\rightarrow$  insieme con nozione di convergenza

$\rightarrow$  spazio topologico

$\rightarrow$  spazio metrico

$\rightarrow$  spazio di Banach

$\rightarrow$  spazio di Hilbert

$\rightarrow \mathbb{R}^n$

c'è anche una struttura di spazio vettoriale

**Nozione di convergenza**

Dichiarare in  $X$  chi sono le succ. convergenti e a cosa convergono.

$$\text{Succ}(X) = \{\text{successioni in } X\} = \{f: \mathbb{N} \rightarrow X\}$$

Nozione di convergenza = sottoinsieme di  $\text{Succ}(X) \times X$   
 $\uparrow$  QUALUNQUE  $x_n \rightarrow x_\infty$

Nozione di convergenza  $\rightsquigarrow$  teo. di Weierstrass

**Def.** Un sottoinsieme  $K \subseteq X$  si dice compatto (per succ.) se ogni successione  $\{x_n\} \subseteq K$  ha una s.succ. convergente, cioè

$$\forall \{x_n\} \quad \exists n_k \rightarrow +\infty \quad \exists x_\infty \in K \quad \text{t.c.} \quad x_{n_k} \rightarrow x_\infty$$

**Def.** Una funzione  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice semicontinua inf. (per succ.) (SCI) se per ogni  $x_n \rightarrow x_\infty$  vale

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \geq f(x_\infty)$$

Teorema Sia  $K \subseteq X$  e sia  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supponiamo che

(i)  $K$  è compatto

(ii)  $f$  è s.c.i.

( $\neq \emptyset$ )

} rispetto ad una nozione di  
convergenza in  $X$

Allora esiste per forza

$$\min \{f(x) : x \in K\}.$$

Dim. Poniamo  $I := \inf \{f(x) : x \in K\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ .

Dalla def. di inf. segue che esiste una succ.  $\{x_n\} \subseteq K$  t.c.

$$f(x_n) \rightarrow I$$

Per l'ipotesi (i) la succ.  $x_n$  ammette una s.succ.  $x_{n_k} \rightarrow x_\infty$ .

Allora

$$I \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. di} \\ \text{inf}}}{\leq} f(x_\infty) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ s.c.i.}}}{\leq} \liminf_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = I.$$

$f(x_n)$  ha lim.,  
quindi tutte le s.succ.  
hanno lo stesso limite  
in  $\mathbb{R}$

$\uparrow$   
Def. di  $x_n$

Da ora in poi  $I \in \mathbb{R}$  ed è il minimo richiesto e  $x_\infty \in \arg\min$ .

— o — o —

□

Metodo diretto : trovare una nozione di convergenza che renda

$\rightarrow f(x)$  s.c.i.

$\rightarrow X$  compatto

Oss. Le due richieste sono ANTITETICHE perché

- se metto tante succ. conv. è + facile essere compatti, ma più difficile essere s.c.i.
- se ne metto troppe ho il problema opposto.

Variaute di Weierstrass Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Supponiamo che

(i)  $f$  è SCI

(ii) esiste un sottolivello compatto, cioè  $\exists M \in \mathbb{R}$  t.c.

$\{x \in X : f(x) \leq M\}$  è compatto (e non  $\emptyset$ )

Allora esiste un  $\{f(x) : x \in X\}$ .

Dim. Chiamo  $X_M$  il sottolivello. Su  $X_M$  applico W. e ottengo che

$\exists x_0 \in X_M$  t.c.  $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in X_M$ .

Dico che  $x_0$  è p.to di min. in generale, cioè

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in X$$

- Se  $x \in X_M$  è scritto sopra
- se  $x \notin X_M$ , allora

$$f(x) > M \geq f(x_0).$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ x \notin X_M & & x_0 \in X_M \end{array}$$

Esempio In  $\mathbb{R}^n$  se  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è SCI e verifica

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

allora ammette minimo.

Dim Pongo  $M := f(\text{p.to a caso}) + 1$ . Ora è ovvio che

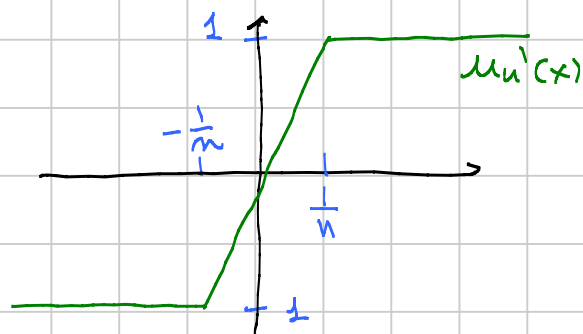
- $X_M \neq \emptyset$  (contiene p.to a caso)
- $X_M$  è limitato (per via del limite)
- $X_M$  è chiuso (perché  $f$  è SCI e  $X_M$  è definito con  $\leq M$ )

Quindi  $X_M$  è compatto  $\neq \emptyset$ .

Oss. I funzionali integrali del tipo  $\int_a^b [u'(x)]^2 dx$  pensati con  $X = C^1([a,b])$  (con la norma  $C^1$ ) hanno enormi problemi di compattezza

$$X_M := \{ u \in C^1([a,b]) : \int_a^b u'^2 dx \leq M \} \text{ non è compatto}$$

Basta prendere funzioni che hanno come derivata  $\rightarrow$  tendono a  $|x|$  che non è  $C^1$ .



**ROAD MAP** È dato un funzionale  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$   
 Estendo il funzionale, cioè trovo un insieme  $\hat{X} \supseteq X$   
 e una funzione

$$\hat{F} : \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

che "estende"  $F$  (FORMULAZIONE DEBOLE)

Supponiamo

- (i)  $\hat{F}(x) \leq F(x)$  per ogni  $x \in X$ ,
- (ii)  $\hat{F}$  verifica su  $\hat{X}$  le ipotesi di Weierstrass generalizzato, quindi ammette minimo,
- (iii) esiste un pto di minimo  $x_0$  per  $\hat{F}$  che appartiene ad  $X$  e verifica  $\hat{F}(x_0) = F(x_0)$ .

Allora  $x_0$  è minimo per  $F$  in  $X$

Dim. 
$$F(x_0) = \hat{F}(x_0) \leq \hat{F}(x) \leq F(x).$$

$\uparrow$  (iii)       $\uparrow$   $x_0$  è pto min per  $\hat{F}$        $\uparrow$  (i)

- ROAD MAP**
- ① Estendere ad un  $\hat{X}$  opportuno (FORM. DEB.)
  - ② Dimostrare che  $\hat{F}$  è SCI (teo. SCI)
  - ③ Dimostrare che i sottoN. di  $\hat{F}$  sono cpt. (teo. cpt.)
  - ④ Dimostrare che  $x_0 \in X$  e  $\hat{F}(x_0) = F(x_0)$   $\uparrow$  teoremi di regolarità

## SPAZI DI HILBERT

→ Spazio vettoriale  $H$

→ prodotto scalare  $\langle x, y \rangle$  definito positivo

→ completo rispetto alla metrica

$$\text{dist}(x, y) = \frac{|x - y|}{\|x - y\|} = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2}$$

Nozione di convergenza:  $u_n \rightarrow u_\infty \Leftrightarrow \|u_n - u_\infty\| \rightarrow 0$

Proposizione La norma è continua WRT alla nozione di convergenza di cui sopra.

Dim.

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2 &= \|x_\infty + x_n - x_\infty\|^2 \\ &= \|x_\infty\|^2 + \|x_n - x_\infty\|^2 + 2 \langle x_\infty, x_n - x_\infty \rangle\end{aligned}$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
0  $\downarrow$  0  
perché  $x_n \rightarrow x_\infty$

$$|\langle x_\infty, x_n - x_\infty \rangle| \leq \|x_\infty\| \cdot \|x_n - x_\infty\| \rightarrow 0.$$

$\uparrow$   $\downarrow$   
C.S. 0

— 0 — 0 —

□