

Calcolo delle Variazioni - LEZIONE 08

Titolo nota

07/10/2015

Esempio 1

$$F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + u^4) dx$$

$$u(0) = 0, u(2) = 7$$

$$u \in C^1([0, 2])$$

Equazione di Eulero

$$\frac{d}{dx} \psi_p(x, u, \dot{u}) = \psi_s(x, u, \dot{u})$$

$$\psi(x, s, p) = p^2 + s^4$$

$$\psi_p = 2p$$

$$\psi_s = 4s^3$$

$$\frac{d}{dx} (2\dot{u}) = 4u^3$$

$$2\ddot{u} = 4u^3$$

$$\ddot{u} = 2u^3$$

$$u(0) = 0$$

$$u(2) = 7$$

Non è evidente esistenza / unicità della soluzione.

Supposto che u è soluzione, è vero che è minimo?

Sì, perché $\psi(s, p)$ è convessa in (s, p) .

Se faccio il conto "a mano"

$$F(w) = F(u+v) = \int (\dot{u} + \dot{v})^2 + (u+v)^4$$

$$= \int \underbrace{\dot{u}^2}_{\text{Eulero 1}} + \underbrace{\dot{v}^2}_{\text{Eulero 1}} + \underbrace{2\dot{u}\dot{v}}_{\text{Eulero 1}} + \underbrace{u^4}_{\text{Eulero 1}} + \underbrace{4u^3v}_{\text{Eulero 1}} + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4$$

$$= F(u) + \int (\underbrace{\dot{v}^2}_{+} + \underbrace{6u^2v^2}_{+} + \underbrace{4uv^3}_{\text{può essere negativo}} + \underbrace{v^4}_{+})$$

può essere negativo

Ora sappiamo che il minimo è unico perché ψ è strett. convessa quindi se $v \neq 0$ c'è disug. stretta.

Quindi Eulero se ha soluzione ce l'ha unica.

Oss. Essendo il problema autonomo, possiamo scrivere la

ERDMANN

$$V(s, p) = p\psi_p - \psi = 2p^2 - p^2 - s^4 = p^2 - s^4$$

quindi

$$\dot{u}^2 - u^4 = \text{costante}.$$

A questa si poteva arrivare direttamente:

$$\ddot{u} = 2u^3 \leadsto \ddot{u} \dot{u} = 2u^3 \dot{u} \leadsto \left(\frac{1}{2} \dot{u}^2\right)' = \left(\frac{1}{2} u^4\right)'$$

$$\leadsto \frac{1}{2} \dot{u}^2 - \frac{1}{2} u^4 = \text{costante} \leadsto \dot{u}^2 - u^4 = c$$

$$\leadsto \dot{u} = \pm \sqrt{c + u^4}$$

Una soluzione formula non c'è

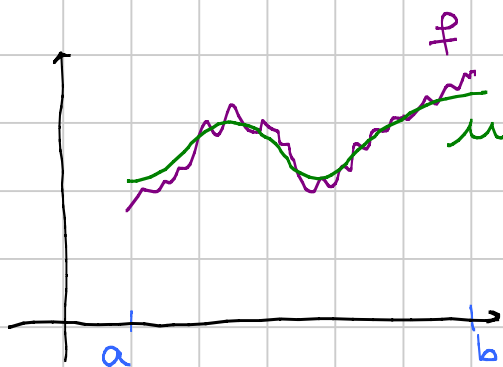
— o — o —

Esempio 2 Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua (ma anche meno)

$$F(u) = \int \dot{u}^2 + \int (u - f)^2$$

$$u \in C^1([a, b])$$

Utilità applicativa: f è un segnale
"sporco" ricevuto e vogliamo
"ripulirlo"



Minimizzare F punta a sostituire f con
una funzione u (il minimo) che deve essere
→ abbastanza poco oscillante
→ " simile a $f(x)$

Esiste il min di F ? Chi è? È unico?

$$\psi(x, s, p) = p^2 + (s - f(x))^2 \quad \psi_p = 2p \quad \psi_s = 2(s - f)$$

$$\frac{d}{dx} \psi_p(x, u, \dot{u}) = \psi_s(x, u, \dot{u}) \leadsto 2\dot{u} = 2(u - f)$$

$$\leadsto u'' = u - f(x)$$

$$u'(a) = u'(b) = 0$$

NBC

Teoria delle equazioni lineari: esiste una sol. dell'eq. diff. e tutte le soluzioni sono del tipo

$$u(x) = \bar{u}(x) + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Analando ad imporre le NBC ottengo un sistema lineare in c_1 e c_2 che ha $\text{Det} \neq 0$, quindi sol. unica.

L'unica soluzione è un minimo perché $\psi(x, s, p)$ è convessa in (s, p) .

— o — o — o —

Esempio 3

$$F(u) = \int_a^b (\dot{u}^2 + u^3)$$

$$u \in C^1 \dots$$

$$u(a) = A \quad u(b) = B$$

$$\text{Eulero: } (2u\dot{u})' = 3u^2$$

$$2\ddot{u} = 3u^2$$

Non è vero che $\psi(s, p) = s^2 + p^3$ è convessa

Dico che il minimo non esiste e $\inf = -\infty$.

Prendo u una qualunque funzione che rispetta le BC.

Prendo v una qualunque funzione nulla al bordo e positiva in (a, b)

$$F(u - mv) = \int_a^b (\dot{u} - m\dot{v})^2 + (u - mv)^3$$

$$= \dots \text{tutta roba con } m^2 \text{ o meno} - m^3 \int_a^b v^3$$

$$\text{da cui } \lim_{m \rightarrow +\infty} F(u - mv) = -\infty$$

Oss. Punto fondamentale $\int \dot{u}^2$ cresce quadratico

$\int u^3$ cresce cubicamente.

— o — o —

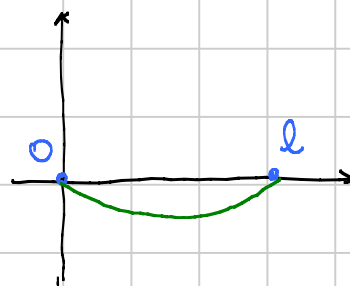
Esempio 4

$$F(u) = \int_0^l (\dot{u}^2 + k u) dx$$

↑
costante data
positiva

$$u(0) = u(l) = 0$$

Modello: posizione di equilibrio di una corda elastica



$$2\ddot{u} = k, \text{ quindi } \ddot{u} = \frac{k}{2}$$

Quindi la sol. di Eulero è la parabola con a e b scelti in modo che passi per i p.ti dati.

$$u(x) = \frac{k}{4} x^2 + a(x) + b$$

Si verifica per convessità che è l'unico minimo.

Esempio 4.1 Stesso con solo $u(0)=0 \leadsto$ nasce il Neumann nell'altro estremo.

Esempio 5

$$F(u) = \int_0^l \dot{u}^2 + k u$$

$$u(0) = u(l) = 0$$

$$\dot{u}(0) = 0$$

potrei permetterlo prima?

Modello: sbarra in cui l'energia elastica dipende da $\dot{u}$, cioè in prima approx. dalla curvatura



Eulero: 1ª forma

$$\int_0^l 2 \dot{u} \ddot{v} + k v = 0$$

2ª forma

$$\int (u'''' + k) v = 0 \leadsto \boxed{u'''' = -k}$$

Cosa posso dire delle Bc

$$u(0) = 0$$

$$u(l) = 0$$

$$u'(0) = 0$$

Nelle integrazioni per parti ...

$$[\dot{u} \ddot{v}]_a^b + \dots [\text{? } v]_a^b$$

$$\dot{v}(0) = 0$$

= 0 perché $v=0$ al bordo

La condizione che nasce

$$\boxed{\ddot{u}(l) = 0}$$

— 0 — 0 — 0 —