

Metodo diretto Eq. di Eulero + in generale

$$F(u) = \int_a^b \psi(x, u, \dot{u}) dx$$

 $\psi: [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di classe C^2 , ma si può risparmiare
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $x \quad u \quad \dot{u}$

$$\varphi(t) = F(u + t v) \quad v \in C^1([a, b]) \quad v(a) = v(b) = 0$$

$$\in C_c^\infty(a, b)$$

$\uparrow$ a supporto compatto

$$\varphi'(t) = \int_a^b [\psi_s(x, u, \dot{u}) v + \psi_p(x, u, \dot{u}) \dot{v}] dx = 0 \quad \text{Eulero 1°}$$

1° strada Trasformare $\dot{v}$ in v

$$\int_a^b \psi_s(x, u, \dot{u}) v - \frac{d}{dx} \psi_p(x, u, \dot{u}) v = 0 \quad \text{Eulero 2°}$$

Lemma FLCV $\leadsto$ $\frac{d}{dx} \psi_p(x, u, \dot{u}) = \psi_s(x, u, \dot{u})$

Eulero diff.

2° strada Trasformare v in $\dot{v}$

$$-\int_a^b \left[\int_a^x \psi_s(t, u, \dot{u}) dt \right] \dot{v} + \int_a^b \psi_p(x, u, \dot{u}) \dot{v} = 0$$

Lemma DBR $\leadsto$

$$\psi_p(x, u, \dot{u}) = c + \int_0^x \psi_s(t, u(t), \dot{u}(t)) dt$$

Eulero diff. in forma DBR

Oss. 1 Caso AUTONOMO, cioè ψ non dipende da x : $\psi(s, p)$
 Allora posso riscrivere in forma più semplice

$$\frac{d}{dx} \psi_p(u, \dot{u}) = \psi_s(u, \dot{u})$$

$$\psi_{ps}(u, \dot{u}) \dot{u} + \psi_{pp}(u, \dot{u}) \ddot{u} - \psi_s(u, \dot{u}) = 0$$

Moltiplico tutto per $\dot{u}$ e ottengo

$$\underbrace{\psi_{ps}(u, \dot{u}) \dot{u}^2 + \psi_{pp}(u, \dot{u}) \dot{u} \ddot{u} - \psi_s(u, \dot{u}) \dot{u}}_{\text{questa è una derivata}} = 0$$

$$\dot{u} \psi_p(u, \dot{u}) - \psi(u, \dot{u}) = V(u, \dot{u})$$

$$\frac{d}{dx} V(u, \dot{u}) = \ddot{u} \cancel{\psi_p(u, \dot{u})} + \dot{u} \psi_{ps}(u, \dot{u}) \ddot{u} + \dot{u} \psi_{pp}(u, \dot{u}) \ddot{u} - \psi_s(u, \dot{u}) \dot{u} - \cancel{\psi_p(u, \dot{u})} \ddot{u} = 0$$

Quindi $V(u, \dot{u}) = \text{costante}$, cioè

$$\dot{u} \psi_p(u, \dot{u}) - \psi(u, \dot{u}) = C$$

Eq. in forma ERDMANN
 (1° ordine)

(alla fine C va determinato)

Oss. 2 Se nel problema iniziale non ho condizioni in qualche estremo, allora posso usare anche $v(x)$ che non sono nulle al bordo. Passando da Eulero 1 a Eulero 2 trovo

$$\left[\psi_p(x, u, \dot{u}) v \right]_a^b = 0 \leadsto \text{produce condizioni}$$

$$\psi_p(x, u, \dot{u}) = 0$$

negli estremi in cui non c'erano
 altre condizioni $\leadsto$ NEUMANN nel
 caso generale

Generalizzazione 1 Cosa succede se ho 10 variabili

$$F(u_1, \dots, u_m) = \int_a^b \psi(x, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m) dx$$

$$\psi(x, s_1, \dots, s_m, p_1, \dots, p_m)$$

Idea: $(v_1, \dots, v_m)$ tutte in $C_c^\infty(a, b)$

$\varphi(t) = F(u_1 + tv_1, \dots, u_m + tv_m)$ e ottengo

$$\varphi'(0) = \int_a^b \left[\sum_{k=1}^m \psi_{s_k}(\dots) v_k + \sum_{k=1}^m \psi_{p_k}(\dots) \dot{v}_k \right] dx = 0$$

Integro per parti

$$\int_a^b \sum_{k=1}^m \left[\psi_{s_k}(\dots) - \frac{d}{dx} \psi_{p_k}(\dots) \right] v_k dx = 0$$

Ora uso $(v_1, \dots, v_m)$ con tutte le componenti nulle tranne una ed arrivo ad un sistema di equazioni

$$\frac{d}{dx} \psi_{p_k}(x, u_1, \dots, u_m, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_m) = \psi_{s_k}(\dots)$$

Allo stesso si trattano le BC.

Seconda generalizzazione Dipendenza da più derivate

$$F(u) = \int_a^b \psi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}) dx \quad \psi(x, s, p_1, \dots, p_m)$$

Prendo $v \in C_c^\infty(a, b)$ e considero

$$\varphi(t) = F(u + tv)$$

$$\varphi'(0) = \int_a^b \left[\psi_s(\dots) v + \sum_{k=1}^n \psi_{p_k}(\dots) v^{(k)} \right] dx = 0$$

Eulero 1°: "richiede" in ipotesi di sicurezza $\psi_s, \psi_{p_1}, \dots, \psi_{p_n}$ continue.

Ora integro per parti quante volte serve

$$\int_a^b \left[\psi_s(\dots) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \psi_{p_k}(\dots) \right] v dx = 0$$

Eulero 2°: richiede parecchie derivate di ψ

FLCV $\leadsto$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \psi_{p_k}(\dots) = -\psi_s(\dots)$$

Eulero differenziale

Condizione SUFFICIENTE per avere che le soluzioni di Eulero sono minimi, almeno nel caso

$$F(u) = \int_a^b \psi(x, u, u') dx$$

Sono minimi quando sappiamo che

$$(s, p) \rightarrow \psi(x, s, p) \text{ è convessa } \forall x \in [a, b]$$

Dcm. Facciamo per semplicità il caso con DBC $u(a)=A$

Sia u una soluzione di Eulero.

$$u(b)=B$$

Sia w una qualunque funzione C^1 con le stesse Bc.

Allora $v := w - u$ è nulla al bordo e C^1

$$F(w) = F(u+v) = \int_a^b \psi(x, u+v, \dot{u}+\dot{v}) dx$$

$$\psi(x, s_0+s_1, p_0+p_1) \geq \psi(x, s_0, p_0) + \psi_s(x, s_0, p_0) s_1 + \psi_p(x, s_0, p_0) p_1$$

$$\geq \int_a^b \psi(x, u, \dot{u}) + \int_a^b \psi_s(x, u, \dot{u}) v + \int_a^b \psi_p(x, u, \dot{u}) \dot{v}$$

(Ho usato $s_0 = u$, $s_1 = v$, $p_0 = \dot{u}$, $p_1 = \dot{v}$)

$$= F(u) + o$$

↑
Eulero 1°

La disuguaglianza che ho usato segue dalla convessità che ho assunto: grafico sopra piano tangente.

— o — o —

Ho usato solo che ψ è C^1 e convessa in (s, p) .

La convessità è richiesta solo in 2 variabili

— o — o —

Riassunto metodo INDIRETTO:

ROAD MAP

→ Scrivo le equazioni di Eulero

→ Spero di riuscire a risolverle

→ Spero di riuscire a dimostrare che la / le soluzioni sono minimi e per ora le strade praticabili sono

- convessità

- usare il LEMMA TRIVIAL con un problema che so risolvere.

— o — o — o —