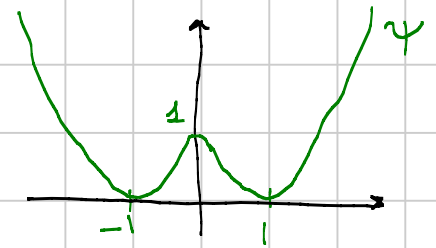


Caso non convesso

$$\int_0^2 \psi(u'(x)) dx$$

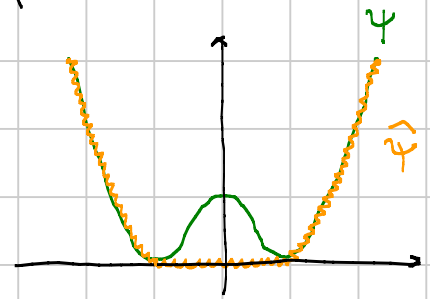


ψ DOPPIO POZZO (DOUBLE WELL)

$$\psi(x) = (x^2 - 1)^2$$

Cosa possiamo dire del problema con dati $u(0) = 0$, $u(2) = \lambda$

Fatto Se $\lambda \geq 2$, allora c'è il minimo
 Se $\lambda \leq -2$ " " " "] ed è unico ed è
 la retta
 Se $\lambda \in (-2, 2)$, il minimo non c'è e $\inf = 0$.



Considero la funzione "convessificata", definita come la più grande funzione convessa $\leq \psi$.

È ovvio che

$$\psi(x) \geq \hat{\psi}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$\underbrace{\int_0^2 \psi(u'(x)) dx}_{F(u)} \geq \underbrace{\int_0^2 \hat{\psi}(u'(x)) dx}_{\hat{F}(u)}$$

Ora la retta che interpola i valori al bordo è $u(x) = \frac{\lambda}{2}x$. Ora se $\lambda \geq 2$ si avrà che

$$\hat{\psi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \psi\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$F(w) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{oss. sopra}}}{\geq} \hat{F}(w) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nel caso convesso} \\ \text{la retta è minimo}}}{\geq} \hat{F}(u) \stackrel{\downarrow}{=} F(u) \quad \forall w \in X$$

Questo dimostra che u è un minimo anche per F !!! Inoltre è unico perché è unico per $\hat{F}$.

LEMMA (TRIVIAL)

Sia $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale

Sia $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ un altro funzionale

↑
insieme

Supponiamo che

(i) $G(x) \leq F(x)$ per ogni $x \in X$

(ii) $\exists x_0 \in X$ tale che $G(x_0) \leq G(x)$ per ogni $x \in X$

(G ammette minimo e x_0 è pto di min, cioè $x_0 \in \operatorname{argmin} G$)

(iii) $G(x_0) = F(x_0)$

Allora

$$F(x_0) \leq F(x) \quad \forall x \in X$$

(cioè $x_0 \in \operatorname{argmin} F$).

Dim. Per ogni $x \in X$ si ha che

$$F(x_0) = G(x_0) \leq G(x) \leq F(x).$$

↑ ↑ ↑
(iii) (ii) (i)

— o — o —

Dimostriamo che per $x \in (-2, 2)$ il minimo non c'è e l'inf. è 0.

1° oss. Se dim. che $\inf = 0$, allora di sicuro non è minimo.

Sinfatti: se $F(u) = 0$ dovrebbe essere $\forall (u'(x)) = 0$ per ogni $x \in [0, 2]$,

ma allora per continuità $u'(x) = \pm 1$ per ogni $x \in [0, 2]$

↑
sempre lo stesso segno

Ma allora $u(2) = \pm 2$ il che non è compatibile.

2° oss. Se posso violare le regole e prendere $u \in C^1$ solo a tratti, allora arrivo a 0.

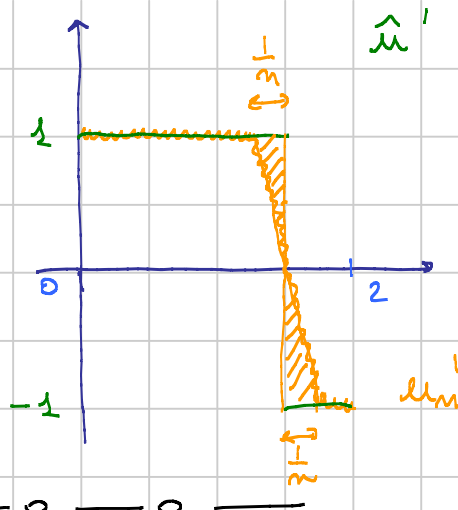
3° oss. Basta ora "smussare l'angolo" e ottengo una successione u_n con $F(u_n) \rightarrow 0$



Per dirlo bene

Mi serve sulle approssimanti

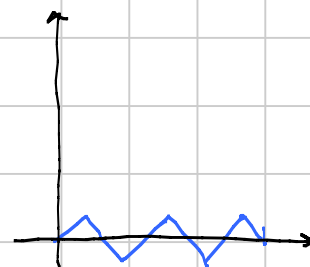
$$\int_0^2 u'_n(x) dx = \lambda$$



Esercizio

$$\min \left\{ \int_0^2 (\underbrace{\psi(u'(x))}_{\text{doppio pezzo}} + [u(x)]^2) dx : u \in C^1 \dots, u(0) = u(2) = 0 \right\}$$

Risposta: l'inf. è 0 ed è raggiunto dai denti di sega



EQUAZIONE DI EULERO IN GENERALE

$$F(u) = \int_a^b \psi(x, u, \dot{u}) dx$$

$$\psi : \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{\mathbb{R}}_s \times \underbrace{\mathbb{R}}_{\dot{p}} \quad \psi(x, s, p)$$

Prendiamo $v \in C^1([a, b])$ con $v(a) = v(b) = 0$ e poniamo

$$\varphi(t) = F(u + tv) = \int_a^b \psi(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v}) dx$$

$$\varphi'(t) = \int_a^b \psi_s(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v}) v + \psi_p(x, u + tv, \dot{u} + t\dot{v}) \dot{v} dx$$

$$\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b (\psi_s(x, u, \dot{u}) v + \psi_p(x, u, \dot{u}) \dot{v}) dx = 0$$

Eulero 1

Integro per parti il 2° termine

$$\int_a^b \psi_p(x, u, \dot{u}) \ddot{u} dx = \underbrace{\left[\psi_p(x, u, \dot{u}) \dot{u} \right]_a^b}_{=0} - \int_a^b \frac{d}{dx} \psi_p(x, u, \dot{u}) \cdot \dot{u} dx$$

Mettendo insieme

$$\int_a^b \left\{ \psi_s(x, u, \dot{u}) - \frac{d}{dx} \psi_p(x, u, \dot{u}) \right\} \dot{u} dx \quad \forall \dot{u} \in \dots \quad \text{Eulero 2}$$

DBR $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx} \psi_p(x, u, \dot{u}) = \psi_s(x, u, \dot{u}) \quad \text{Eulero diff.}$$

Sviluppando

$$\frac{d}{dx} \psi_p(x, u, \dot{u}) = \psi_{px}(x, u, \dot{u}) + \psi_{ps}(x, u, \dot{u}) \dot{u} + \psi_{pp}(x, u, \dot{u}) \ddot{u}$$

quindi l'equazione è di ordine 2.

In alternativa, dopo Eulero 1 integro l'altro termine per parti

$$\int_a^b \psi_s(x, u, \dot{u}) \dot{u} dx = - \int_a^b \underbrace{\left[\int \psi_s(x, u, \dot{u}) dx \right]}_{\text{primitiva}} \ddot{u} dx + \underbrace{0}_{\substack{\uparrow \\ \text{bordo se u e } \dot{u} \text{ va}}}$$

Otengo usando DBR a media nulla

$$\begin{aligned} \psi_p(x, u, \dot{u}) &= C + \text{primitiva} \\ &= C + \int_a^x \psi_s(y, u(y), \dot{u}(y)) dy \end{aligned}$$