

Esercizio Trovare l'errore nella dim. del Lemma DBR a media nulla e capire come si rimedia.

PROBLEMA

$$\min \left\{ \underbrace{\int_a^b \psi(u'(x)) dx}_{F(u)} : u \in C^1([a,b]) \text{ t.c. } u(a) = A \text{ e } u(b) = B \right\}$$

Già visto: $\rightarrow \psi(x) = x^2$ l'unica soluzione è la retta

$\rightarrow \psi(x) = |x|$ se $A \neq B$ ci sono infinite soluzioni (tutte le funzioni monotone)

$\rightarrow \psi(x) = |x|^{1/2}$ e $A \neq B$ non ci sono soluzioni e $\inf = 0$.

Parte inutile: calcolo dell'eq. di Eulero. Prendo $v \in C^1([a,b])$ con $v(a) = v(b) = 0$

pongo

$$\varphi(t) = F(u + tv)$$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{d}{dt} \int_a^b \psi(u'(x) + t v'(x)) dx && (\text{senza ipotesi per poter derivare sotto il segno di integrale}) \\ &= \int_a^b \psi'(u'(x) + t v'(x)) v'(x) dx \end{aligned}$$

$$\varphi'(0) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\int_a^b \psi'(u'(x)) v'(x) dx = 0 \quad \forall v \in V \quad \text{Eulero 1}$$

Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \left[\underbrace{\psi'(u'(x))}_{0} \cdot v(x) \right]_a^b &- \int_a^b \frac{d}{dx} \psi'(u'(x)) \cdot v(x) dx = 0 \\ &\quad \leftarrow \text{senza ipotesi} \\ &- \int_a^b \psi''(u'(x)) u''(x) \cdot v(x) dx \end{aligned}$$

$$\int_a^b \psi''(u'(x)) u''(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V \quad \text{Eulero 2}$$

Lemma DBR $\Rightarrow$ $\psi''(u'(x)) u''(x) = 0$ Eulero diff.

$$\left. \begin{array}{l} u(a) = A \\ u(b) = B \end{array} \right\} \text{(DBC)}$$

Se $u''(x) \equiv 0$, allora l'equazione è risolta, cioè la retta è sempre una soluzione. È l'unica se uno sa che $\psi''(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Alternativa: giunto ad Eulero 1 $\int_a^b \psi'(u'(x)) u'(x) dx = 0$

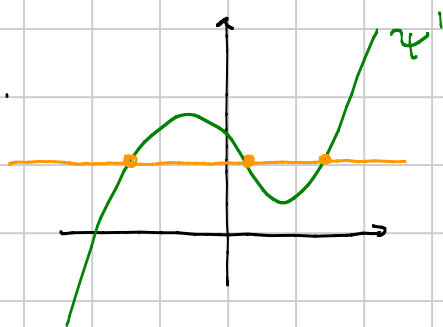
osservo che come $u'(x)$ posso prendere una qualunque funzione continua o anche C^∞ che sia a media nulla

$$0 = u(a) - u(b) = \int_a^b u'(x) dx$$

Quindi lemma DBR a media nulla $\Rightarrow$ $\psi'(u'(x)) = \text{costante}$

Da questa possiamo dedurre che $u'(x) = \text{costante}$ a meno che $\psi'(x)$ non sia costante in un intero intervallo.

Oss.



Se $\psi'(x) = c$ ha solo p.ti isolati come soluzione, allora $u'(x)$ se è continua deve essere costante.

— o — o —

Domanda: la retta è un p.to di minimo?

Teorema Se $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente convessa, allora la retta è l'unico punto di minimo.

Dim 1 Funzione se ψ è di classe C^2 . Vale la disuguaglianza

$$\psi(a+b) \geq \psi(a) + \psi'(a)b \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

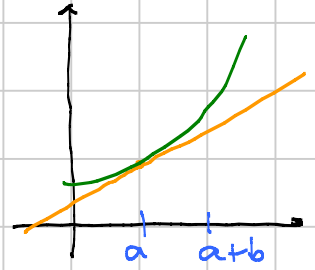
con disuguaglianza stretta se $b \neq 0$.

[Infatti $\psi(a+b) = \psi(a) + \psi'(a)b + \underbrace{\frac{1}{2} \psi''(c)b^2}_{\geq 0} \geq \psi(a) + \psi'(a)b$

↑
Taylor-Lagrange

Se avessimo uguaglianza per un certo $b \neq 0$, avremmo uguaglianza in un intero intervallo]

Una funzione convessa sta sopra le rette tangenti



Sia $u(x)$ la retta che interpola i dati al bordo.

Sia $w(x)$ una qualunque altra funzione.

Pongo $v(x) = w(x) - u(x)$

$$F(w) = \int_a^b \psi(w) dx = \int_a^b \psi(\underbrace{\hat{u}}_a + \underbrace{\hat{v}}_b) dx \stackrel{(*)}{\geq} \int_a^b \psi(\hat{u}) dx + \underbrace{\int_a^b \overbrace{\psi'(\hat{u})}^{\text{costante}} \hat{v}(x) dx}_0 \geq F(u)$$

Vale il segno di uguale se e solo se vale in $(*)$, cioè se e solo se $\hat{v}(x) \equiv 0$, cioè $v(x) \equiv 0$.

Dim 2 Non voglio supporre che ψ sia di classe C^2 , e nemmeno C^1 .

Fatto generale sulle funzioni convesse: sia x_0 qualunque, siano $\psi'_+(x_0)$ e $\psi'_-(x_0)$ la derivata dx e sx, sia $m \in [\psi'_-(x_0), \psi'_+(x_0)]$.

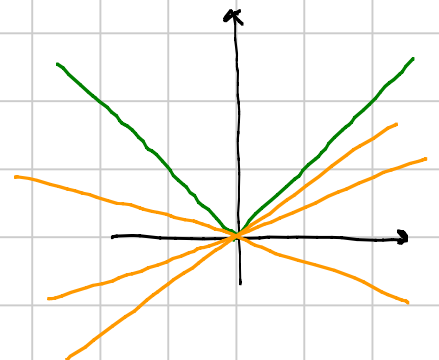
Allora vale

$$\psi(x_0 + R) \geq \psi(x_0) + mR$$

cioè ψ sta sopra la retta che passa per $(x_0, \psi(x_0))$ e ha coeff. ang. m

Se ψ è strett. convessa, allora la disug.

è stretta per $R \neq 0$



Dato il fatto generale si chiude come prima.

Prendo $u(x)$ la retta, che sarà $u(x) = Cx + D$,

prendo $m \in [\psi'_-(c), \psi'_+(c)]$ e concludo

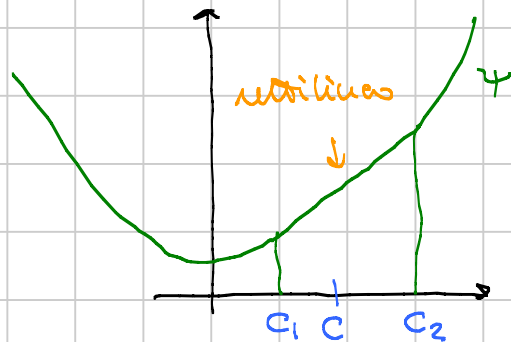
$$F(w) = \int \psi(\hat{u} + \hat{v}) = \int \psi(\underbrace{C}_{F''(u)} + \underbrace{\hat{v}}_0) \geq \int \psi(C) + \int m \hat{v} \geq F(u) \quad \square$$

Teorema Se ψ è solo convessa, ma non necessariamente strett. convessa, allora la retta è sempre un p.to di minimo.

[Dim: riga sopra]

Non è unico se e solo se il coeff. angolare della retta C casca all'interno di un intervallo in cui ψ è una funzione affine, cioè esistono $C_1 < C < C_2$ tale che $\psi''(x) = 0$ per ogni $x \in [C_1, C_2]$

Oss. C non può essere C_1 o C_2 , cioè se lo è c'è unicità



Mettiamo che $C = C_1$

$$\psi(C + \tilde{v}) \geq \psi(C) + \psi'(C) \tilde{v}$$

↑
voglio il segno di =

Per avere uguaglianza devo avere $\tilde{v}(x) \geq 0$, cioè $\tilde{v}$ monotona, ma è nulla agli estremi.