

wlog : without loss of generality

WRT : with respect to

RHS : right-hand side

LHS : left - " "

NASCITA DELLE CONDIZIONI AL BORDO

$$F(u) = \int_a^b (\dot{u}^2 + u^2) dx$$

① $u \in C^1([a,b])$: $u(a) = A$, $u(b) = B$. In questo caso

$$V = \{v \in C^1([a,b]) : v(a) = v(b) = 0\}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) = F(u+tv) &= \dots = \int_a^b \dot{u}^2 + 2t \int_a^b \dot{u} \dot{v} + t^2 \int_a^b \dot{v}^2 \\ &\quad + \int_a^b u^2 + 2t \int_a^b uv + t^2 \int_a^b v^2 \end{aligned}$$

$$\varphi'(0) \Rightarrow \boxed{\int_a^b \dot{u} \dot{v} + \int_a^b uv = 0 \quad \forall v \in V} \quad \text{Eulero 1ª}$$

Integro per parti il 1° integrale

$$\left[\overset{0}{u'(x)v(x)} \right]_a^b - \int_a^b \ddot{u} v + \int_a^b uv = 0$$

per merito di v

$$\boxed{\int_a^b (-\ddot{u} + u) v dx = 0 \quad \forall v \in V} \quad \text{Eulero 2ª}$$

Lemma DBR $\Rightarrow -\ddot{u} + u = 0$

$$\boxed{\ddot{u} = u} \quad \text{Eulero differenziale}$$

$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ e imponendo le cond. al bordo

$$u(a) = A \quad u(b) = B$$

trovo c_1 e c_2 univocamente.

Quindi ho avuto da risolvere

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{u} = u \\ u(a) = A \\ u(b) = B \end{array}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{condizioni al bordo} \\ \text{di DIRICHLET} \end{array} \right\} \quad (\text{DBC}) \leftarrow \text{già scritte in } X$$

- Oss. 1 - Buona notizia: eq. di ordine 2 + 2 condizioni al bordo
2 - Cattiva notizia: NON è un problema di Cauchy, quindi
nulla garantisce esistenza e unicità

Una volta che ho trovato la soluzione, posso dimostrare che è effettivamente un minimo con la disuguaglianza

$$\textcircled{2} \quad X = \{u \in C^1([a,b]) : u(a) = A\}$$

Ora

$$V = \{v \in C^1([a,b]) : v(a) = 0\}$$

Procedo come prima e arrivo a

$$\boxed{\int_a^b \ddot{u} v + \int_a^b u v = 0 \quad \forall v \in V} \quad \text{Eulero 1}^a$$

Integro per parti

$$\left[u'(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b \ddot{u} v + \int_a^b u v = 0$$

$$u'(b) v(b) + \int_a^b (-\ddot{u} + u) v \, dx = 0$$

Eulero 2^a

Procedo in due fasi

Fase 1 Mi limito alle $v \in V$ t.c. $v(b) = 0$. Otengo

$$\int_a^b (-\ddot{u} + u) v \, dx = 0$$

$$\forall v \in V \text{ t.c. } v(b) = 0$$

classe per cui vale DBR

da cui deduco (DBR) che $\ddot{u} = u$

Fase 2 Grazie alla fase 1 posso riscrivere Eulero 2^a come

$$u'(b) v(b) = 0 \quad \forall v \in V$$

L'unica possibilità è che sia $u'(b) = 0$ (posso scegliere $v \in V$ con $v(b) = 1$)

Ho ottenuto il problema

$$\begin{cases} \ddot{u} = u & \rightarrow \text{eq. di ordine 2} \\ u(a) = A & \rightarrow \text{DBC che c'era già in } X \\ u'(b) = 0 & \rightarrow \text{NEUMANN BC (NBC) nota dopo} \end{cases}$$

③ $X = \{ u \in C^1([a,b]) \text{ e basta} \}$

avei trovato due NBC omogenee ($= 0$)

... Da Eulero 2^a diventava

$$u'(b) v(b) - u'(a) v(a) + \int_a^b (-\ddot{u} + u) v \, dx = 0$$

↓ se ue va in fase 1 quando considero $v \in V$ t.c. $v(a) = v(b) = 0$

Fase 2: scelgo $v(a) = 0$ e $v(b) = 1 \rightsquigarrow u'(b) = 0$
 $v(a) = 1$ e $v(b) = 0 \rightsquigarrow u'(a) = 0$

$$\textcircled{4} \quad X = \{ u \in C^1([a,b]) : u(a) = u(b) \}$$

$$V = \{ v \in C^1 \dots : v(a) = v(b) \}$$

$$\dots \quad \int_a^b \ddot{u} \ddot{v} + \int_a^b u v = 0 \quad \forall v \in V \quad \leftarrow \text{Eulero 1}^a$$

integrale per parti:

$$u'(b)v(b) - u'(a)v(a) + \int_a^b (-\ddot{u} + u)v = 0 \quad \forall v \in V$$

Fase 1 : considero $v \in V : v(a) = v(b) = 0 \rightsquigarrow \text{DBR} \rightsquigarrow \ddot{u} = u$

$$\text{Fase 2} : \quad \underbrace{u'(b)}_k v(b) - \underbrace{u'(a)}_k v(a) = 0 \quad \forall v \in V$$

$$k (u'(b) - u'(a)) = 0$$

Basta prendere $k \neq 0$ per ottenere $u'(a) = u'(b)$.

In conclusione abbiamo

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ u(a) = u(b) \leftarrow \text{era in } X \\ \dot{u}(a) = \dot{u}(b) \leftarrow \text{nuova nata} \end{cases} \quad \text{PBC : PERIODIC boundary conditions}$$

Problema della Sezione 3

$$F(u) = \int_0^2 \dot{u}^2$$

$$X = \{ u \in C^1([0,2]) : u(0) = 7 \text{ e } \int_0^2 u(x) dx = 9 \}$$

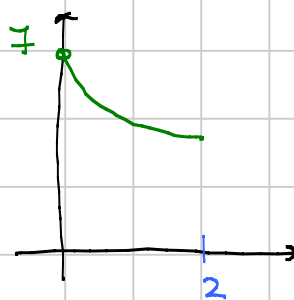
$$\int_0^2 \ddot{u} \ddot{v} = 0 \quad \forall v \in V \quad v(0) = 0 \text{ e } \int_0^2 v = 0$$

$$\text{Per parti} \rightsquigarrow \int_0^2 \ddot{u} v dx + u'(2)v(2) = 0 \quad \forall v \in V$$

Fase 1 $\leadsto \ddot{u} = c$ (DBR unmodificato)

Fase 2 $\leadsto u'(2) = 0$

$$\begin{cases} \ddot{u} = c & \leftarrow \text{Eq. ordine 2} \\ u(0) = 7 & \leftarrow \text{DBC data in } x \\ u'(2) = 0 & \leftarrow \text{NBC data dopo} \end{cases}$$



Trovata la soluzione del problema diff., resta da dim. che è effettivamente un minimo.

Sia $u(x)$ la soluzione del problema. Prendo una qualunque $w \in X$ e osservo che $v = w - u \in V$. Ma allora

$$F(w) = F(u+v) = \underbrace{\int_0^2 \dot{u}^2}_{F(u)} + 2 \underbrace{\int_0^2 \dot{u} \dot{v}}_{\substack{0 \\ \text{per Eulero}}} + \underbrace{\int_0^2 \dot{v}^2}_{\geq 0}$$

$$\geq F(u)$$

Vale il segno di $=$ se e solo se $\int \dot{v}^2 = 0$, cioè se e solo se $v(x)$ è costante, ma essendo nulla in $x=0$ l'unica possibilità è che sia $v(x) \equiv 0$.

$$F(u) = \int_0^2 (\dot{u}^2 + u^2) dx$$

$$X = \{u \in C^1([0,2]): \dot{u}(0) = 7, u(2) = 5\}$$

$$\int_a^b \dot{u} \dot{v} + \int_a^b u v = 0 \quad \forall v \text{ t.c. } \dot{v}(0) = 0, v(2) = 0$$

$$\underbrace{u'(2)v(2) - u'(0)v(0)}_{\text{Fase 2: } u'(0) = 0} + \underbrace{\int_0^2 (-\ddot{u} + u) v}_{\text{Fase 1 } \leadsto \text{via}} = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{u} = u \\ \dot{u}(0) = 0 \\ u(2) = 5 \end{cases} \quad \text{e che fine fa } \dot{u}(0) = 7 \leadsto \text{il minimo non esiste.}$$