

# LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO VARIAZIONI

(DE BOIS - REYMOND)

Sia  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  e sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) \cdot v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V$$

dove  $V = \{v \in C^1([a, b]) : v(a) = v(b) = 0\}$ .Allora  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in [a, b]$ .

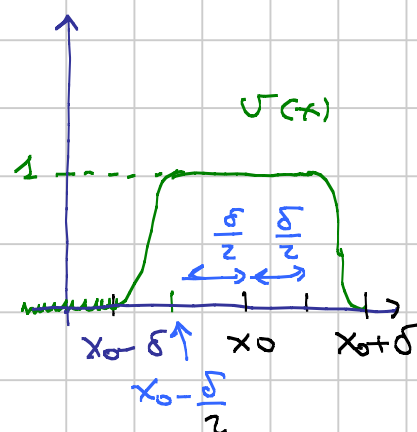
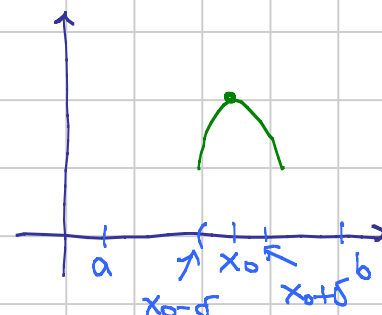
Dim.: Supponiamo  $f(x) \not\equiv 0$ . Allora WLOG (without loss of generality) esiste  $x_0 \in (a, b)$  t.c.  $f(x_0) > 0$ .

Per continuità esiste  $\delta > 0$  tale

$$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Posso supporre anche che  $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ .Prendo ora  $v(x)$  come nella figura, cioè

- $v(x) = 1$  per ogni  $x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}]$
- $v(x) = 0$  se  $x \notin [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$
- $0 \leq v(x) \leq 1$  per ogni  $x \in [a, b]$



Ma allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) v(x) dx &= \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \underbrace{f(x) v(x)}_{\geq 0} dx \geq \int_{x_0 - \frac{\delta}{2}}^{x_0 + \frac{\delta}{2}} \underbrace{f(x) v(x)}_{\geq \frac{1}{2} f(x_0)} dx \\ &\geq \frac{1}{2} f(x_0) \delta > 0 \end{aligned}$$

Oss. L'esercizio di analisi 1 è mostrare che esiste  $v \in C^1$  fatta come sopra.

La condizione  $v(a) = v(b) = 0$  è immediata.

Problema Per quali classi  $V$  di "funzioni test" continua a valere il lemma DBR?

① Posso aumentare la regolarità, per esempio

$$V = \{ v \in C^{\infty}([a,b]) : v(a) = v(b) = v^{(13)}(a) = 0 \}$$

(basta vedere che in questo  $V$  trovo la  $v$  come sopra)

③ Posso aggiungere più di annullamento in mezzo?

$$V = \{ v \in C^{\infty}([a,b]) : v(a) = v(b) = v\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \}$$

(se  $f(x) \equiv 0$  allora esiste  $x_0 \neq a, b, \frac{a+b}{2}$  in cui  $f(x_0) \neq 0$  a quel pto procedo come prima evitando  $\frac{a+b}{2}$ )



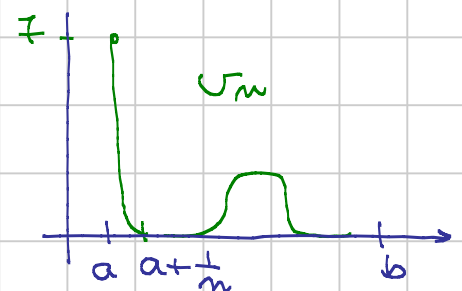
④ Posso chiedere valori strani al bordo?

$$V = \{ v \in C^{\infty}([a,b]) : v(a) = 7, v(b) = 0 \}$$

Ora devo usare una successione di funzioni test che vanno a 0 dopo  $a + \frac{1}{n}$ .

$$\int_a^b f(x) \cdot v_n(x) dx = \int_a^{x_0+\delta} f(x) \cdot v_n(x) dx + \int_{x_0-\delta}^{a+\frac{1}{n}} f(x) \cdot v_n(x) dx$$

come prima



Il primo integrale tende a 0 se  $0 \leq v_n(x) \leq \tau$  in  $[a, a + \frac{1}{n}]$

$$\left| \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) \cdot v_n(x) dx \right| \leq \int_a^{a+\frac{1}{n}} |f(x)| \cdot |v_n(x)| dx$$

$$\leq \max |f| \leq \tau$$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot \tau \cdot \max |f| \rightarrow 0$$

⑤ Se voglio essere minimalista su  $V$ ?

Basta che esista una successione  $\{v_n(x)\} \subseteq \text{Span}(V)$  tale che  $v_n(x) \rightarrow v(x)$  che ho usato nella dimostrazione uniformemente. A quel pto

$$\int_a^b f(x) \cdot v_n(x) dx \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{conv. della conv. unif.}}} \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx > 0$$

**VARIANTE DEL LEMMA**

Supponiamo che

$$\int_a^b f(x) v(x) dx = 0$$

$$\forall v \in C^1([a,b]) \text{ t.c. } v(a) = v(b) = 0$$

$$\text{e } \int_a^b v(x) dx = 0$$

Allora  $f(x)$  è costante in  $[a,b]$ . (Stiamo sempre supponendo  $f$  continua)

**Dim.** Dimostrazione brutale

$$\int_a^b f(x) \cdot v(x) dx = - \int_a^b f'(x) \cdot V(x) dx$$

$$= 0$$

Infatti posso supporre  $V(a) = V(b) = 0$ . Nota: sono uguali perché

$$V(b) - V(a) = \int_a^b v(x) dx = 0$$

Se applico DBR a  $f'(x)$  ottengo  $f'(x) \equiv 0$ , cioè  $f(x)$  costante

Serve una dim. che non usi che  $f(x)$  è  $C^1$ ...

Supponiamo per assurdo che  $f(x)$  non sia costante. Allora esistono  $x_0$  e  $y_0$  t.c.  $f(x_0) \neq f(y_0)$ . Wlog  $f(x_0) > f(y_0)$

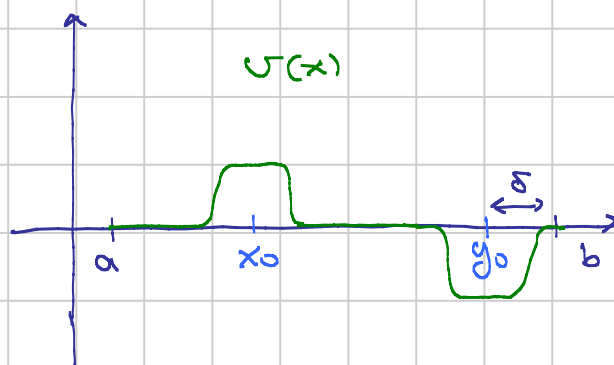
Scelgo  $v(x)$  t.c.

$v(x) \sim 1$  vicino a  $x_0$

$v(x) \sim -1$  vicino a  $y_0$

e  $\int v = 0$  e avendo che

$$\int_a^b f(x) v(x) \sim (f(x_0) - f(y_0)) \delta$$



Più precisamente scelgo  $\delta > 0$  tale che

$$f(x) > \frac{f(x_0) + f(y_0)}{2} \quad \text{per ogni } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$f(x) < \frac{f(x_0) + f(y_0)}{2} \quad \text{per ogni } x \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$$

e concludo come prima.

Esempio  $F(u) = \int_0^2 [\dot{u}(x)]^2 dx$

$$X = \{ u \in C^1([0, 2]) : u(0) = 7, \int_0^2 u(x) dx = 25 \}$$

Prendo variazioni  $v \in C^1([0, 2]) : v(0) = 0, \int_0^2 v(x) dx = 0$

Se  $u \in X$ , allora  $u + tv \in X$  per ogni  $v \in V$ . Allora

$$F(u + tv) = \int_0^2 (\dot{u} + t\dot{v})^2 dx = \int_0^2 \dot{u}^2 + 2t \int_0^2 \dot{u}\dot{v} + t^2 \int_0^2 \dot{v}^2$$

Derivo wrt  $t$  e ottengo

$$2 \int_0^2 \dot{u}\dot{v} dx = 0$$

Eulero 1<sup>a</sup> forma

Supponendo  $u$  più regolare integro per parti

$$[u'(x) v(x)]_0^2 - \int_0^2 u''(x) \cdot v(x) dx = 0$$

$$u'(2) \cdot v(2) - \int_0^2 u''(x) \cdot v(x) dx = 0$$

IL LIMITE a considerare le  $v \in V$  tali che  $v(2) = 0$ .

Otengo

$$\boxed{\int_0^2 u''(x) \cdot v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V} \quad \begin{array}{l} \text{Eulero} \\ \text{2ª forma} \end{array}$$

Otengo dal Lemma DBR seconda versione che  $u''(x)$  è costante, quindi  $u(x)$  è una parabola.

Se oltre ad aver imposto  $u(0) = 7$  avessi imposto anche  $u(2) = 3$  ora concluderevo perché

$$u(x) = ax^2 + bx + c$$

e avevo 3 condizioni e 3 parametri e potevo risolvere

$$\begin{array}{l} \uparrow \\ u(0) \\ u(2) \\ \int u = 25 \end{array}$$