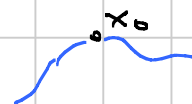


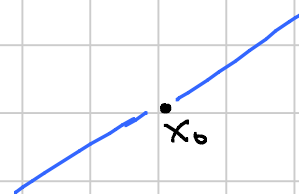
Metodo INDIRETTO $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ $\uparrow$
insiemeSupponiamo che $x_0 \in X$ sia pto di min per f .Supponiamo $\delta > 0$ e $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = x_0$
curva a valori in X che passa per x_0

Considero la funzione

$$(-\delta, \delta) \ni t \rightarrow \underbrace{f(\gamma(t))}_{\psi(t)} \in \mathbb{R}$$

Allora $\psi: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ che ha un minimo per $t=0$. Quindi se per caso ψ è derivabile dove succederà che $\psi'(0) = 0$ Fatto generale Se x_0 è un pto di minimo, allora $\psi'(0) = 0$ per ogni $\psi(t) = f(\gamma(t))$ dove γ è una curva con $\gamma(0) = x_0$ che risulta derivabile.Caso speciale 1 $X = V$ spazio vettorialeDato un qualunque $v \in V$ basta considerare

$$\gamma(t) = x_0 + tv \quad (\text{retta per } x_0 \text{ con direzione } v)$$



In tal caso

$$\psi'(0) = \frac{d}{dt} f(x_0 + tv) \Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$$

 $\uparrow$
deriv. direzionale $\uparrow$
DERIVATE SECONDO GATEAUXCaso speciale 2 $X = W$ spazio affine con spazio giacitura V Dato $w_0 \in W$ posso prendere un qualunque $v \in V$ e considerare

$$\gamma(t) = \underbrace{w_0 + tv}_{\in W} \quad t \in \mathbb{R}$$

Caso degli spazi funzionali

$$X = \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 5\} = W$$

$$V = \{u \in C^1([0,1]) : u(0) = 0\}$$

$$\gamma(t) = u + tv$$

$\uparrow$ data in X $\nwarrow$ data in V

VARIAZIONE "VERTICALE"

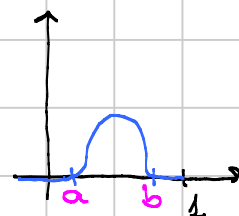
Variante interessante (forse) : considerare $v \in C^1([0,1])$ con supporto contenuto in $(0,1)$

$$[\gamma(t)](x) = u(\underline{x + tv(x)})$$

se t è piccolo, allora l'argomento sta in $[0,1]$ per ogni x , quindi $\gamma(t) \in X$

VARIAZIONE "ORIZZONTALE"

— o — o —



Esempi $X = \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 5, u(2) = 10\}$

$$F_1(u) = \int_0^2 [u'(x)]^2 dx$$

$$F_2(u) = \int_0^2 |u'(x)| dx$$

$$F_3(u) = \int_0^2 |u'(x)|^{1/2} dx$$

Voglio minimizzarli su X

X è spazio affine con giacitura $V = \{v \in C^1([0,2]) : v(0) = v(2) = 0\}$

$$\psi(t) = F_1(u+tv) = \int_0^2 [\dot{u} + t\dot{v}]^2 dx$$

$$= \int_0^2 (\dot{u}^2 + 2t\dot{u}\dot{v} + t^2\dot{v}^2) dx$$

$$= \int_0^2 \dot{u}^2 + 2t \int_0^2 \dot{u}\dot{v} + t^2 \int_0^2 \dot{v}^2$$

$$\psi'(0) = 2 \int_0^2 \dot{u}\dot{v} dx = 0$$

$$\int_0^2 \dot{u}\dot{v} dx = 0 \quad \forall v \in V$$

Prima forma integrale
dell'eq. di EULERO

Vuoi integrare per parti : suppongo $u \in C^2$:

$$\int_0^2 \ddot{u} \dot{v} dx = \underbrace{[\dot{u} v]_0^2}_{\substack{\downarrow \\ \dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0) = 0}} - \int_0^2 \ddot{u} v dx$$

$$\dot{u}(2)v(2) - \dot{u}(0)v(0) = 0$$

$$\boxed{\int_0^2 \ddot{u}(x) v(x) dx = 0 \quad \forall v \in V}$$

Seconda forma
integrale dell'eq.
di Eulero

Lemma misterioso (Lemma DBR) $\Rightarrow \ddot{u}(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 2]$

Eq. di Eulero in forma DIFFERENZIALE

Quindi u è l'unica retta che congiunge le due condizioni

$$u(0) = 5 \quad u(2) = 10 \quad u(x) = 5 + \frac{5}{2}x$$

Che cosa ho dimostrato veramente? Se esiste un minimo di classe C^2 , questo è la retta.

Salvo la faccia 😊: considero la funzione $u(x) = 5 + \frac{5}{2}x$.

Considero un altro elemento $w \in X$. Allora lo posso scrivere come

$$w = \underbrace{w - u}_{\in V} + u$$

$F(w) =$ stessi conti di prima con $t = 1$

$$= \underbrace{\int_0^2 \dot{u}^2 dx}_{F(u)} + 2 \underbrace{\int_0^2 \dot{u} \dot{v} dx}_{\substack{\downarrow \\ \text{per parti viene} \\ \int_0^2 \ddot{u} v dx = 0}} + \underbrace{\int_0^2 \dot{v}^2 dx}_{\geq 0 \text{ ed è } = 0 \Leftrightarrow \dot{v}(x) \equiv 0}$$

$$\Leftrightarrow v(x) \equiv 0$$

deve essere in V

Ho così dimostrato che $F(w) \geq F(u)$ per ogni $w \in X$ e vale l'uguaglianza $\Leftrightarrow w = u$. Quindi la retta è il p.to di min. $\square$
Oss. Non ho usato il lemma DBR nella dim., che parte dopo 😊

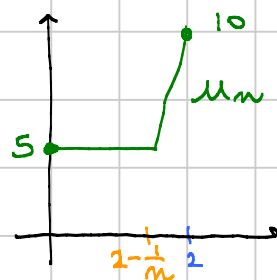
Vediamo $F_2(u)$ e $F_3(u)$

Nel caso di F_3 l'inf. è 0 e il min. non esiste (evidente)

Forziamo le regole...

$$F(u_m) = \int_{2-\frac{1}{m}}^2 \sqrt{5m} \, dx = \frac{1}{m} \sqrt{5m} \rightarrow 0$$

$\uparrow$
 $u_m'(x)$



Basta "smussare l'angolo" per avere un vero controesempio.

Nel caso di $F_2(u)$ ci sono infinite soluzioni, poiché tutte le $u \in X$ crescenti vanno bene:

$$F_2(u) = \int_0^2 |\ddot{u}(x)| \, dx = \int_0^2 \ddot{u}(x) \, dx = u(2) - u(0) = 5$$

$\uparrow$
vale = se $\ddot{u}(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, 2]$
vale $>$ se $\ddot{u}(x) < 0$ da qualche parte