

Problemi di minimo: dato insieme X , data $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, studiare
 $\uparrow$
 in arrivo sempre $\mathbb{R}$

$$\min \{ f(x) : x \in X \}$$

[con minimo si intende il minimo valore, i p.ti di minimo sono i punti $x_0 \in X$ t.c. $f(x_0) = \text{minimo valore}$]

- ① Determinare se il minimo esiste
- ② Se sì, trovare quanto vale e trovare i p.ti di minimo
- ③ Se no, trovare $\inf \{ f(x) : x \in X \}$ e capire
 → perché il minimo non esiste
 → come si raggiunge l'inf (ad esempio per $f(x) = \arctan x$ con $x \in \mathbb{R}$ l'inf. si raggiunge andando a $-\infty$)
 — o — o —

Quattro p.ti essenziali del programma

- ① Metodo INDIRETTO
- ② Metodo DIRETTO
- ③ RILASSAMENTO
- ④ GAMMA - CONVERGENZA

Metodo indiretto Esempio $\min \{ \underbrace{x^2 + 2x}_{f(x)} : x \in \mathbb{R} \}$

$$f'(x) = 2x + 2 \rightsquigarrow x = -1 \text{ p.to di minimo } \rightsquigarrow \min f(-1) = -1$$

Salvo la faccia: provo a dim. che $f(x) \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + 2x \geq -1 \rightsquigarrow (x+1)^2 \geq 0 \quad \text{OK}$$

brutta copia

Dim. seria: $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\uparrow$ vale l' = se e solo se $x = -1$

Metodo diretto : dimostrare direttamente l'esistenza mediante teoremi astratti (Weierstrass e varianti)

Nell'esempio : $f(x)$ continua + $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{esiste min su } \mathbb{R}$

Una volta che so che esiste posso procedere come sopra.

Rilassamento : cosa fare quando il min non esiste

Esempio $\min \{ (x^2 - 2)^2 : x \in \mathbb{Q} \}$ non esiste
 $\inf \{ \quad \quad \quad \} = 0$

Però ho sbagliato l'ambientazione, se mi metto in $\mathbb{R}$ esiste
In $\mathbb{Q}$ le successioni minimizzanti, cioè le succ. $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ t.c.
 $f(x_n) \rightarrow \inf = 0$ sono quelle che in $\mathbb{R}$ tendono a $\sqrt{2}$ oppure $-\sqrt{2}$.

Gamma convergenza Successione di problemi di minimo

$$\min \{ f_n(x) : x \in X \}$$

Cosa succede per $n \rightarrow +\infty$? Speranza : che esista $f_\infty : X \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

↑
oppure
 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

① $\min \{ f_n(x) : x \in X \} \rightarrow \min \{ f_\infty(x) : x \in X \}$

↑
convergenza dei minimi

② convergenza in qualche senso dei p.ti di minimo.

Complicazioni : caso in cui $f_n : X_n \rightarrow \mathbb{R}$

Esempio $\min \{ \underbrace{x^2 + n \cos^4 x}_{f_n(x)} : x \in \mathbb{R} \} = M_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \frac{\pi^2}{4}$. Inoltre una qualunque succ. di p.ti di minimo ha una s.succ. che conv. a $\pm \frac{\pi}{2}$
 $f_\infty(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } \cos x = 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$

SLOGAN: VORREI MA NON POSSO

Gli esempi saranno limitati ai FUNZIONALI INTEGRALI

X = spazio di funzioni, per esempio $X = \{u \in C^1([0,2]) : u(0) = 5\}$

Funzionale è un sinonimo di funzione e si usa tutte le volte che l'argomento è a sua volta una funzione

$$F(u) = \int_0^2 [u'(x)]^2 dx \quad u \in X$$

Funzionali integrali sono del tipo

$$F(u) = \int_a^b \varphi(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^{(k)}(x)) dx$$

si intende che φ è data e le funzioni di X sono almeno C^k

(spesso sarà $k=1$ perché poi cambia poco)
— 0 — 0 —

Di cosa non possiamo parlare

① Funzionali geometrici

Problema di DIDONE: $\min \{ \text{Area}(\partial V) : \underbrace{V \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ ha } \text{Vol}(V) = 1}_{\times} \}$

Problema di PLATEAU: date un po' di curve Γ in $\mathbb{R}^3$, trovare

$\min \{ \text{Area}(S) : S \text{ è una sup. in } \mathbb{R}^3 \text{ che ha quelle curve come bordo} \}$

② Problemi di frontiera libera

$([0,2] \setminus I)$

$\min \left\{ \int_I [u'(x)]^2 dx + \text{lunghezza} : u \in C^1([0,2]), u(0) = 7, I \subseteq [0,2] \text{ è un insieme} \right\}$

③ Problemi di discontinuità libera

MUMFORD-SHAH : è data una funzione $f(x,y)$ definita in un rettangolo $R = [0,1] \times [0,1]$

$$F(u,k) = \int_R |\nabla u|^2 dx dy + \int_R |u-f|^2 dx dy + c \text{Length}(k)$$

$$X = \{(u,k) : k \subseteq \mathbb{R} \text{ è un compatto e } u \in C^1(\mathbb{R} \setminus k)\}$$

Deriva dalla ricostruzione di immagini

