

$$g(x, y, z) = 0$$

Esercizio 1

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 - z = 4, x \geq 0, z \leq 0\}$$

Nel p.to $(0, 2, 0)$ normale $(1, 4, -1)$

$$F = (x - y, y^2, x y z)$$

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 2y, -1)$$

Calcolare $\int_S \langle \text{rot } F, n \rangle d\sigma$

Come è fatta S ? È un insieme limitato?

$$\begin{matrix} x + y^2 - z = 4 \\ \geq 0 \quad \geq 0 \quad \geq 0 \end{matrix}$$

somma di 3 quantità ≥ 0

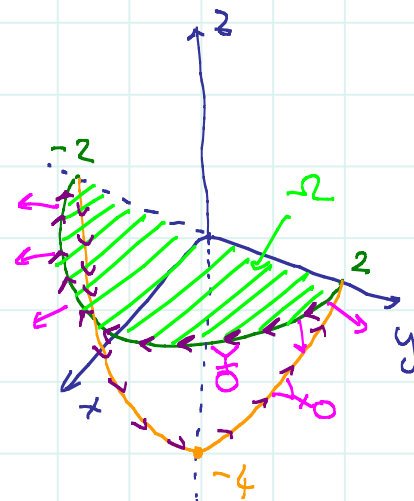
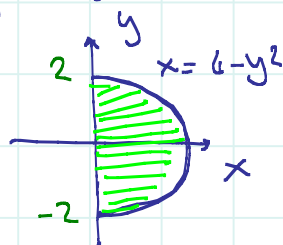
$$x \in [0, 4], y^2 \in [0, 4], y \in [-2, 2]$$

$$z \in [-4, 0]$$

Intersezioni di S con i piani

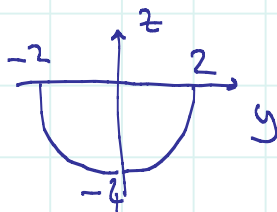
piano xy

$$\begin{aligned} x + y^2 &= 4 \\ x &= 4 - y^2 \end{aligned}$$



Piano yz

$$\begin{aligned} y^2 - z &= 4 \\ z &= y^2 - 4 \end{aligned}$$



1° modo

Parametrizzo S , calcolo $\text{rot } F$, e uso la definizione

S = grafico di $x + y^2 - 4$ sulla base

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y^2 - 4, \underbrace{y \in [-2, 2], 0 \leq x \leq 4 - y^2}_{\text{base } \Omega}\}$$

Sarebbe utile per fare il volume del solido limitato da S e dai 2 piani

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x-y & y^2 & xyz \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rot } F = (xz, -yz, -1)$$

$$\Phi(x, y) = (x, y, x+y^2-4)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \Phi_x \\ \leftarrow \Phi_y \end{matrix} \quad \Phi_x \wedge \Phi_y = \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ (-1, -2y, 1) \end{matrix}$$

↑
opposta rispetto a quella richiesta

$$\int_S \langle \text{rot } F, \vec{n} \rangle d\sigma = - \iint \left\{ \overset{\uparrow \text{cambio verso}}{-2} \left\{ \overset{\uparrow x}{x} (\overset{\uparrow z}{x+y^2-4}) (\overset{\uparrow \mu_1}{-1}) - \overset{\uparrow y}{y} (\overset{\uparrow z}{x+y^2-4}) (\overset{\uparrow \mu_2}{-2y}) - \overset{\uparrow \mu_3}{1} \cdot \overset{\uparrow \mu_3}{1} \right\} dx dy \right.$$

= si fa (un po' di pezzi se ne vanno per simm.)

2° modo Stokes $\int_S \langle \text{rot } F, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} A dx + B dy + C dz$

↑
comp. di F

curve che percorrono ∂S nel modo giusto

Scrivere una parametrizzazione coerente dei due pezzi di bordo

→ pezzo verde $\gamma_1(t) = (4-t^2, t, 0) \quad t \in [-2, 2]$ al contrario
 $\gamma_1(t) = (4-t^2, -t, 0) \quad t \in [-2, 2]$ senza invertire

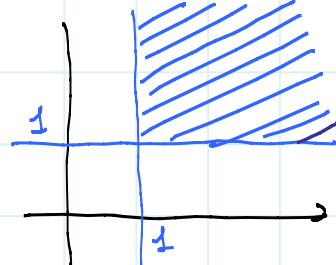
→ pezzo arancione $\gamma_2(t) = (0, t, t^2-4) \quad t \in [-2, 2]$

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} A dx + B dy + C dz &= - \int_{-2}^2 \left\{ \overset{x-y}{(4-t^2-t)} \overset{\dot{x}}{(-2t)} + \overset{y^2}{t^2} \overset{\dot{y}}{1} \right\} dt \\ &\quad + \int_{-2}^2 \left\{ \overset{x-y}{(0-t)} \overset{\dot{x}}{0} + \overset{y^2}{t^2} \overset{\dot{y}}{1} + \overset{xyz}{0} \overset{\dot{z}}{2t} \right\} dt \end{aligned}$$

= si fa e forse viene lo stesso.
 — 0 — 0 —

Esercizio 2

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in \mathbb{R}}} \frac{xy^\alpha}{1+x^2y^2}$$



Fatto 1 Se esiste, allora è 0

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1+t^2} = 0$$

Fatto 2 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(1, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}$

Quindi per $\alpha \geq 2$ il limite di sicuro non esiste

Fatto 3 $x^2y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ se $(x,y) \in D$ [Fatta quando abbiamo fatto il limite di xy nella stessa zona]

• Se $x \geq y$, allora $x^2y^2 \geq x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2$
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad y^2 \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

• Se $y \geq x$, allora stessa cosa simmetrica

1 SI 2 NO

Ma allora $\frac{xy^\alpha}{1+x^2y^2} \leq \frac{xy^\alpha}{1+\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

Quindi il limite esiste se $\alpha < 1$ (coord. polari)

Fatto 4 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t^\alpha, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^{2\alpha+2}}$ e questo è sempre 0

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(t, 1+\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t\left(1+\frac{1}{t}\right)^\alpha}{1+t^2\left(1+\frac{1}{t}\right)^2} = 0 \quad \ddot{?}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(1+\frac{1}{t}, t\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)t^\alpha}{1+\left(1+\frac{1}{t}\right)^2t^2} = 0 \quad \text{se } \alpha < 2 \quad \ddot{?}$$

— 0 — 0 —

[Aggiunto dopo video]

Fatto 4 Se $\alpha \geq 1$ e $x \geq 1$, allora $x \leq x^\alpha$ e quindi

$$0 \leq \frac{xy^\alpha}{1+x^2y^2} \leq \boxed{\frac{(xy)^\alpha}{1+(xy)^2}}$$

↓
0 se $\alpha < 2$ poiché $xy \rightarrow +\infty$ in $\mathbb{R}$
(per la stima del fatto 3)

lo stesso ragionamento funziona anche per $\alpha \leq 1$, ma la stima diventa

$$0 \leq \frac{xy^\alpha}{1+x^2y^2} \leq \frac{xy}{1+(xy)^2}$$

e si conclude come sopra

Alternativa leggermente più brutale

$$\frac{xy^\alpha}{1+x^2y^2} \leq \frac{xy^\alpha}{x^2y^2} = \frac{1}{x} \frac{1}{y^{2-\alpha}}$$

quando $x^2+y^2 \rightarrow +\infty$ in $\mathbb{R}$, allora
almeno una tra x e y tende a $+\infty$,
e l'altra è ≥ 0 .

— 0 — 0 —