

INVERSIONE DEL ROTORE

Problema: dato un campo $E = (A, B, C)$, trovare un campo F tale che $\text{rot } F = E$

Esiste? La cond. necessaria è che $\text{div } E = 0$

La cond. è pure sufficiente se l'insieme di definizione è fatto bene, ad esempio se è stellato

Esempio $E = (xz + y^2, yz + x, xy^3 - z^2)$

$\text{div} = z + z - 2z = 0 \quad \therefore$ Siamo su tutto $\mathbb{R}^3$, quindi esiste A, B, C t.c. $\text{rot } (A, B, C) = E$.

$$\text{rot } (A, B, C) = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

Quindi devo risolvere

$$\begin{cases} C_y - B_z = xz + y^2 \\ A_z - C_x = yz + x \\ B_x - A_y = xy^3 - z^2 \end{cases}$$

1° passo Decido arbitrariamente una delle 3 componenti, ad esempio $C \equiv 0$ (ma potrei fare $B \equiv 0$ oppure $A = zy^2x^3$)

Resta

$$\begin{cases} -B_z = xz + y^2 \\ A_z = yz + x \\ B_x - A_y = xy^3 - z^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\leadsto B = -\frac{1}{2}xz^2 - y^2z + \varphi(x, y) \\ &\leadsto A = \frac{1}{2}yz^2 + xz + \psi(x, y) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &\leadsto B = -\frac{1}{2}xz^2 - y^2z + \varphi(x, y) \\ &\leadsto A = \frac{1}{2}yz^2 + xz + \psi(x, y) \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{primitive} \\ \text{rispetto a } z \end{array}$$

2° passo Decido arbitrariamente una tra $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$, ad esempio $\varphi(x, y) \equiv 0$ (ma potrei fare $\psi(x, y) = y^2 + x \arctan y$)

Adesso sostituisco nella 3ª equazione

$$B_x - A_y = -\cancel{\frac{1}{2}z^2} - \cancel{\frac{1}{2}z^2} - 4y(x,y) = xy^3 - \cancel{z^2}$$

Se ne vanno miracolosamente le z : questo DEVE succedere.

3° passo Trovo ψ risolvendo $\psi_y = -xy^3 \leadsto \psi(x,y) = -\frac{1}{4}xy^4$

Conclusione: un campo che va bene è

$$\left(\frac{1}{2}yz^2 + xz - \frac{1}{4}xy^4, -\frac{1}{2}xz^2 - y^2z, 0\right)$$

[Per conferma meglio fare la verifica calcolando il rotore]

Variante Trovare un campo con lo stesso rotore e seconda componente uguale a xy

1° modo Rifaccio la procedura partendo con $B = xy$

2° modo Sfrutto il lavoro già fatto ed il fatto che se aggiungo ∇g al campo precedente non altero il suo rotore.

Quindi basta che

$$g_y = xy + \frac{1}{2}xz^2 + y^2z$$

ad esempio

$$g(x,y,z) = \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{2}xy^2z^2 + \frac{1}{3}y^3z$$

Quindi il nuovo campo sarà

$$\left(\frac{1}{2}yz^2 + xz - \frac{1}{4}xy^4 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^2z^2, xy, xyz + \frac{1}{3}y^3\right)$$



Perché la procedura descritta funziona sempre?

$$E = (A, B, C) \quad F = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$$

Vogliamo risolvere

$$\hat{C}_y - \hat{B}_z = A$$

$$\hat{A}_z - \hat{C}_x = B$$

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = C$$

Mettiamo $\hat{C} \equiv 0$

$$-\hat{B}_z = A$$

$$\hat{A}_z = B$$

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = C$$

primitiva di A risp. a z

↓

$$\leadsto \hat{B} = -\bar{A} + \boxed{\varphi(x, y)} = 0$$

$$\leadsto \hat{A} = \bar{B} + \psi(x, y)$$

↑
primitiva di B
rispetto a z

Sostituendo nella terza equazione viene

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = -\bar{A}_x - \bar{B}_y - \psi_y = C \quad \leadsto \psi_y = -\bar{A}_x - \bar{B}_y - C$$

Da qui vorrei trovare $\psi(x, y)$. Posso? Se e solo se $-\bar{A}_x - \bar{B}_y - C$ non dipende da z. Quindi basta controllare che la sua derivata rispetto a z faccia 0.

$$(\bar{A}_x + \bar{B}_y + C)_z = \bar{A}_{zx} + \bar{B}_{zy} + C_z = \bar{A}_z + \bar{B}_z + C_z = 0$$

↑
 $\bar{A}_z = A$
 $\bar{B}_z = B$

↑
perché $\text{div} E = 0$

Domanda È chiaro dove abbiamo usato che $\text{div} E = 0$
Dove abbiamo usato che la zona di definizione
è fatta bene?

LA SOLITA IN $\mathbb{R}^3$

Esiste un campo E definito in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tale che $\operatorname{div} E = 0$,
ma E non è il rotore di nulla su tutto Ω insieme

Il campo E è del tipo $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} (x, y, z)$

Cerco α in modo che $\operatorname{div} E = 0$

$$A_x = \left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} \right]_x = \frac{(x^2+y^2+z^2)^\alpha - (x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1} 2x \cdot x}{(x^2+y^2+z^2)^{2\alpha}}$$

B_y e C_z sono analoghi

$$\operatorname{div} E = \frac{3(x^2+y^2+z^2)^\alpha - 2\alpha(x^2+y^2+z^2)^{\alpha-1}(x^2+y^2+z^2)}{(\dots)^{2\alpha}}$$

Quindi se prendo $\alpha = \frac{3}{2}$ mi viene $\operatorname{div} E = 0$

$$E = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

[se ci fosse un segno $-$, che tanto non cambia la divergenza,
sarebbe una specie di campo gravitazionale che decade come
 $\frac{1}{\text{distanza}}$]

Perché E non è un rotore?

SE fosse un rotore, il suo flusso attraverso una superficie chiusa, cioè senza bordo, verrebbe 0.

Ma se prendo una qualunque sfera centrata nell'origine,
orientata verso Ω esterno, il suo flusso diventa

$$\begin{aligned}
 \int_{S(0,R)} \langle E, m \rangle d\sigma &= \int_{S(0,R)} \left\langle \frac{(x,y,z)}{\| \cdot \|^3}, \frac{(x,y,z)}{\| \cdot \|} \right\rangle d\sigma \\
 &= \int_{S(0,R)} \frac{\| (x,y,z) \|^2}{\| \cdot \|^4} d\sigma = \frac{1}{R^2} \text{area}(S(0,R)) \\
 &= 4\pi
 \end{aligned}$$

Oss. Non dipende dal raggio e ovviamente c'è un motivo.

— o — o —