

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

Utilità: trasformare integrali nell'interno in integrali sul bordo e viceversa

Esempio 1 Consideriamo la curva

$$\gamma(t) = (t-t^2, t-t^3) \quad t \in [0,1]$$

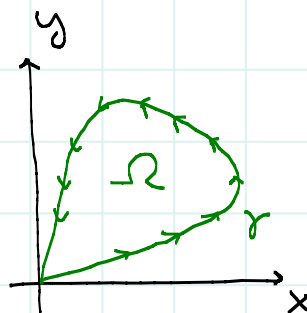
Si tratta di una curva chiusa che limita un insieme Ω .

Calcolare

Area(Ω)

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$$

Disegno del sostegno fatto in una les. precedente



1° modo

Provare a scrivere Ω come insieme normale risp. axe x o y .

$x = t - t^2 \leadsto$ ricavo t in funzione di $x \leadsto$ sostituisco sotto
 $y = t - t^3$

2° modo

Cerco di spostare gli integrali sul bordo

$$\iint_{\Omega} (Ax + By) \, dx \, dy = \int_{\gamma} A \, dy - B \, dx$$

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_{\Omega} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{div}(x,0) \\ \uparrow \\ A}}{1} \, dx \, dy = \int_{\gamma} x \, dy = \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{(t-t^2)} \underset{\substack{\uparrow \\ y'(t)}}{(1-3t^2)} \, dt$$

= si fa

In alternativa

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_{\Omega} 1 \, dx \, dy = \int_{\gamma} -y \, dx = \int_0^1 - \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{(t-t^3)} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{x}(t)}}{(1-2t)} \, dt$$

= si fa

Oss. I due integrali si ottengono l'uno dall'altro integrando per parti

Fatto generale Se γ percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra, allora

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} x \, dy = - \int_{\gamma} y \, dx$$

Posso anche fare dei vici del tipo

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma} (c x \, dy - (1-c) dx)$$

Ho usato

$$E = (\underset{\substack{\uparrow \\ A}}{c} x, \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{(1-c)} y)$$

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \int_{\gamma} \underset{\substack{\uparrow \\ E = (\frac{1}{2}x^2, 0)}}{x} \, dy$$

oppure

$$E = (0, xy)$$

$$\int_{\gamma} A \, dy = \int_{\gamma} \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)^2}}{(t-t^2)^2} \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{(1-3t^2)} \, dt$$

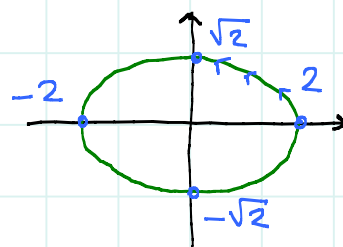
= si fa

Esempio 2 $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 4 \}$

$$\vec{E} = (x + \arctan(e^y), \sin R(x^3) + y^2)$$

Calcolare il flusso di $\vec{E}$ entrante in Ω .

$\uparrow$
orientazione opposta
rispetto a quella canonica



1° modo Cerco la γ che percorre come si deve $\partial\Omega$

$$\gamma(t) = (2 \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Uso formula

$$\text{Flusso} = - \int_{\gamma} A dy - B dx = \int_{\gamma} B dx - A dy$$

$\uparrow$
orientazione

$$= \int_0^{2\pi} \{ (\underbrace{\sin \theta}_{B} (8 \cos^3 \theta) + 2 \sin^2 \theta) (-2 \underbrace{\sin \theta}_{\dot{x}(t)}) + \dots \} d\theta$$

= anguri!

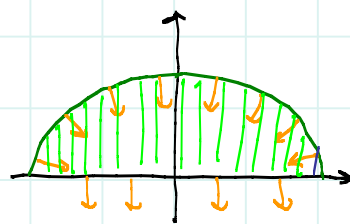
2° modo Sposto l'integrale dal bordo all'interno.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds &= \iint_{\Omega} \text{div } E \, dx \, dy = \iint_{\Omega} (1 + 2y) \, dx \, dy \\ &= \text{area (ellisse)} = \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Quindi flusso richiesto = $-2\sqrt{2}\pi$

$\uparrow$
orientazione

Esempio 3 Calcolare il flusso entrante dalla parte superiore dell'ellisse precedente



Definisco $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 4, y \geq 0 \}$
e osservo che

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (1 + 2y) \, dx \, dy &= \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \\ &= \underbrace{\int \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds}_{\substack{\uparrow \\ \text{si fa facile}}} + \int_{\text{segmento}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds \end{aligned}$$

Il primo è quello che voglio cambiato di segno.

Il secondo lo calcolo parametrizzando il segmento come

$$\gamma(t) = (t, 0) \quad \text{con } t \in [-2, 2],$$

e viene

$$\int_{\text{segmento}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{-2}^2 \sin(t^3) dt = 0$$

$\uparrow$
(0, -1)

funzione
dispari
 $\swarrow$

Volevamo $\int_{\gamma} -B dx$

Conclusione:

$$\text{Flusso richiesto} = - \iint_{\Omega} (1+2y) dx dy \quad \text{che si fa.}$$

Esempio 4 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 2\}$

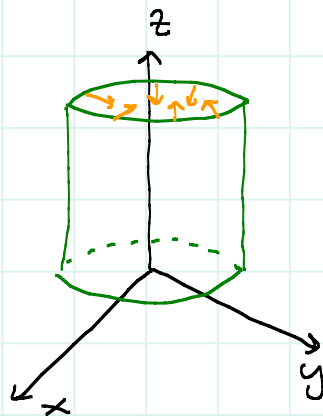
$$\vec{E} = (x + yz^3, y - \sin(z), x^2y^3 - 2z)$$

Calcolare il flusso di $\vec{E}$ attraverso S con orientazione entrante

Parametizziamo S per esercizio

$$(\cos \theta, \sin \theta, u) : \theta \in [0, 2\pi] \quad u \in [0, 1]$$

Ora bisognerebbe calcolare (M_1, M_2, M_3) e vedere se è quello giusto.



Osservo che $\text{div } E = 0$ 😊, quindi quello che entra dalla superficie laterale coincide con quello che esce dai tappi, cioè dalle due basi

$$\text{Flusso richiesto} = \int_{\text{Base giù}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma + \int_{\text{Base su}} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

$\uparrow$ (0,0,-1) $\uparrow$ (0,0,1)

$$\iint_{\text{Base giu}} \langle E, (0,0,-1) \rangle d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (-x^2y^3 + 2\overset{=0}{\underset{\uparrow}{z}}) dx dy$$

= 0 perché è dispari in y

$$\iint_{\text{Base su}} \langle E, (0,0,1) \rangle d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2y^3 - 2\underset{\substack{\uparrow \\ z \text{ nella base su}}}{2}) dx dy$$

$$= -4 \text{ Area (Base su)} = -4\pi \quad \text{☺}$$

— o — o —