

- Gradiente
- Laplaciano
- Divergenza
- Rotore

Gradiente INPUT: funzione SCALARE $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 OUTPUT: funzione VETTORIALE $\nabla f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$\nabla f(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_d}(x))$$

Laplaciano INPUT: funz. scalare $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
 OUTPUT: " " $\Delta f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta f(x) = f_{x_1 x_1}(x) + \dots + f_{x_d x_d}(x)$$

traccia di $Hf(x)$

Divergenza INPUT: funzione VETTORIALE $E: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
 OUTPUT: funzione SCALARE $\operatorname{div} E: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{div} E = (E_1)_{x_1} + \dots + (E_d)_{x_d}$$

d=2 $E = (A, B)$ $\operatorname{div} E = A_x + B_y$

d=3 $E = (A, B, C)$ $\operatorname{div} E = A_x + B_y + C_z$

Rotore Specifico di $\mathbb{R}^3$

INPUT: funzione VETTORIALE $E: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

OUTPUT: " VETTORIALE $\operatorname{rot} E: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) = \text{rot}(A, B, C)$$

In fisica si definisce anche il rotore di campi in dim 2

$$\text{rot}(A, B) = \text{rot}(A, B, 0) = (0, 0, B_x - A_y)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 dipendono
 da x e y

Simboli dei fisici

Gradiente

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

Laplaciano

$$\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$$

Divergenza

$$\nabla \cdot E = (\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C)$$

Rotore

$$\nabla \wedge E$$

— o — o —

Formule classiche

$$\textcircled{1} \quad \text{div}(\nabla f) = \text{div}(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$$

$$\text{div}(\nabla f) = \Delta f$$

qualunque sia il numero di variabili

$$\textcircled{2} \quad \text{rot}(\nabla f) = (0, 0, 0)$$

(inversione dell'ordine di derivazione)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} \rightsquigarrow (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = (0, 0, 0)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{div}(\text{rot}(E)) = 0$$

(anche qui inversione ordine di derivazione)

$$\text{rot } E = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\text{div}(\text{rot } E) = \cancel{C_{yx}} - \cancel{B_{zx}} + \cancel{A_{zy}} - \cancel{C_{xy}} + \cancel{B_{xz}} - \cancel{A_{yz}} = 0$$

Oss. Occhio che molte operazioni NON hanno senso, ad esempio

$$\begin{array}{ccccccc} \nabla E & & \operatorname{rot}(\operatorname{div} E) & & \operatorname{div}(\operatorname{rot} E) & & \operatorname{div}(\operatorname{div} E) \\ & & - & 0 & - & 0 & - \end{array}$$

Gradiente nullo / uguale

→ Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f = \vec{0}$ vettore nullo

Allora se Ω è **CONNESSO** si può concludere che f è costante. (Altrimenti è costante su tutte le componenti connesse di Ω)

→ Se $f_1: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono t.c. $\nabla f_1 = \nabla f_2$, allora $f_1 = f_2 + \text{costante}$ se Ω è CONNESSO.

ROTORE nullo / uguale

→ Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo con $\operatorname{rot} E = \vec{0}$ vettore nullo

$$\operatorname{rot} E = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) = (0, 0, 0)$$

vuol dire che

$$C_y = B_z$$

$$A_z = C_x \quad \Rightarrow \quad \omega = A dx + B dy + C dz \text{ è chiusa}$$

$$A_y = B_x$$

Allora se Ω è **SEMPLICEMENTE CONNESSO** possiamo concludere che $E = \nabla f$ per una opportuna f scalare

La stessa cosa vale in $\mathbb{R}^2$ usando il "rotore dei fisici"

Oss. Un'estensione del rotore in $\mathbb{R}^d$ avrebbe $\frac{d(d-1)}{2}$ componenti.

→ Se $\text{rot } E_1 = \text{rot } E_2$, e Ω è semplicemente connesso, allora $E_2 = E_1 + \nabla f$ per una opportuna f .

Divergenza nulla / uguale

→ Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia $E: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori t.c.
 $\text{div } E = 0$

Allora, se Ω ha una opportuna proprietà possiamo dedurre che E è un rotore, cioè esiste $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.c. $E = \text{rot } F$

→ Se $\text{div } E_1 = \text{div } E_2$, e $\Omega \dots$, allora $E_2 = E_1 + \text{rot } F$

Opportuna proprietà: → gratis nel caso stellato

→ possibilità di trasportare ovunque un palloncino a forma di sfera

(ok in $\mathbb{R}^3 \setminus \text{retta}$, non ok in $\mathbb{R}^3 \setminus \text{sfera piena}$)

Tutti gli operatori ∇ , Δ , div , rot sono lineari

Valgono formule simili a quelle della derivata del prodotto, opportunamente interpretate

Esempio $\text{div}(fE) = f \text{div } E + \langle \nabla f, E \rangle$

$$\begin{aligned} \text{div}(fA, fB, fC) &= (fA)_x + (fB)_y + (fC)_z \\ &= \underbrace{f_x A}_\text{ } + \underbrace{f A_x}_\text{ } + \underbrace{f_y B}_\text{ } + \underbrace{f B_y}_\text{ } + \underbrace{f_z C}_\text{ } + \underbrace{f C_z}_\text{ } \\ &= \underbrace{\langle \nabla f, E \rangle}_\text{ } + f \text{div } E \end{aligned}$$

Maxwell (wiki in inglese CURL) (mettere a posto i segni)

$$\text{rot}(\text{rot } E) = \pm \nabla(\text{div } E) \pm (\Delta A, \Delta B, \Delta C)$$