

Formula per l'area di una superficie

Se $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ è di classe C^1 , allora

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \iint_{\Omega} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv \\ &= \iint_{\Omega} \|\phi_u \wedge \phi_v\| \, du \, dv \end{aligned}$$

Caso speciale: superfici cartesiane

$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2} \, dx \, dy$$

La parametrizzazione è $\phi(u,v) = (u, v, f(u,v))$

$$\begin{array}{c} \phi_u \\ \phi_v \end{array} \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-f_u, -f_v, 1)$$

↑ vettore normale alla sup

$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{\underset{\substack{\uparrow \\ M_1^2}}{f_u^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ M_2^2}}{f_v^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ M_3^2}}{1}} \, du \, dv$$

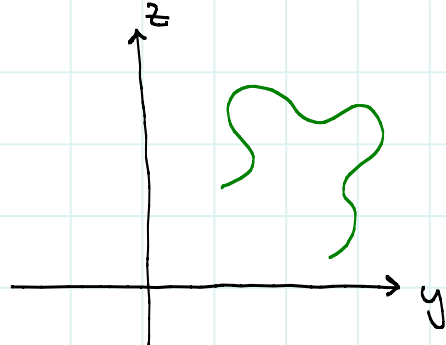
Oss. (Algebra lineare) Se w_1 e w_2 sono due vettori in $\mathbb{R}^3$, allora il parallelogramma che generano ha area $\|w_1 \wedge w_2\|$

Oss. Nell'idea di definizione stavamo costruendo una somma di Riemann dell'integrale

Superfici di rotazione

Consideriamo una curva nel piano yz ,
ancora meglio nel semipiano $y \geq 0$
La scriviamo come

$$(y(t), z(t)) \quad \text{con } t \in [a, b]$$



Ruotando il sostegno intorno all'asse z otteniamo una sup.
parametrizzata da

$$\Phi(\theta, t) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t)) \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad t \in [a, b]$$

↑
tutti i punti a quota $z(t)$ che
distano $y(t)$ dall'asse z

L'area di questa superficie è data dalla formula

$$\text{Area} = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Questa si può anche interpretare come

GULDINO 2

$$\text{Area} = \text{Lung}(curva) \cdot 2\pi y_G$$

↑
lunghezza cammino del G della
curva durante la
rotazione

↑
coord. y del baricentro della
CURVA che ruota

Dim. formula 1 $\Phi(\theta, t) = (y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -y(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta & 0 \\ \dot{y}(t) \cos \theta & \dot{y}(t) \sin \theta & \dot{z}(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \Phi_\theta \\ \leftarrow \Phi_t \end{matrix}$$

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_t = (y(t) \dot{z}(t) \cos \theta, y(t) \dot{z}(t) \sin \theta, -y(t) \dot{y}(t))$$

$$\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| = \{y(t)^2 \dot{z}(t)^2 \cos^2 \theta + y(t)^2 \dot{z}(t)^2 \sin^2 \theta + y(t)^2 \dot{y}(t)^2\}^{1/2}$$

$$= \{y(t)^2 \dot{z}(t)^2 + y(t)^2 \dot{y}(t)^2\}^{1/2}$$

$$= \underbrace{y(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{con il segno + perché} \\ \text{siamo nel semipiano} \\ y \geq 0}} \{\dot{z}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\}^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dt \|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dt y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \\ &= 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \end{aligned}$$

Dim. Guldino 2 Moltiplico e divido per $\text{length}(\text{curva})$

$$\text{Area} = \text{length} \cdot 2\pi \cdot \underbrace{\frac{1}{\text{length}} \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt}_{\substack{\int_\gamma y ds \\ \text{y}_G \text{ per definizione}}}$$

Integrali superficiali

Notazioni Ingredienti

→ superficie $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

→ funzione $f(x, y, z)$ definita almeno sul supporto di ϕ

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma$$

$\uparrow$
sup

$\uparrow$
Integrale
superficiale

$$\int_S f(x, y, z) dS$$

$$\int_S f(x) d\mathcal{H}^2$$

$\uparrow$
misura di HAUSDORFF
2-dimensionale

Significato fisico se f è la densità del materiale, allora è la massa totale della sup.

Idea della definizione Sempre la solita...

→ approssimo la sup. con i parallelogrammi

→ faccio finta che f sia costante in ogni parallelogrammo

→ rifittisco e passo al limite.

Formula per il calcolo Se tutto è abbastanza regolare

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma$$

$$= \iint_{\Omega} f(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \|\phi_u \wedge \phi_v\| du dv$$

Baricentro di una sup $G = (x_G, y_G, z_G)$

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}} \int_S x d\sigma$$

$$y_G = \dots$$

$$z_G = \dots$$

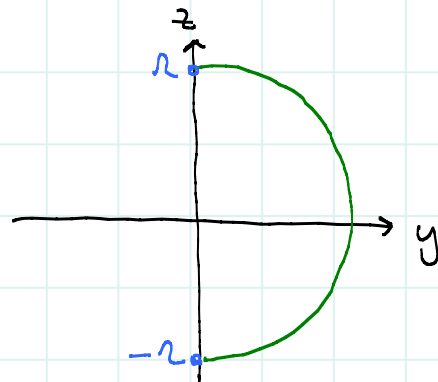
Esempio 1 Area della sfera

$$\text{Area} = 2\pi y_G \cdot \text{lunghezza} = 4\pi r^2$$

$$\uparrow \frac{2r}{\pi}$$

$$\uparrow \pi r$$

↑
baricentro semicirc.
calcolato a suo
tempo



[Alternativa : $(y(t), z(t)) = r(\cos t, \sin t) \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\text{Area} = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{r \cos t}_{\substack{\uparrow \\ y}} \cdot \underbrace{r}_{\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}} dt = 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 4\pi r^2]$$

Esempio 2 Volume e Area sup. del toro

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= 2\pi y_G \cdot \text{Area cerchio} \\ &= 2\pi R \cdot \pi r^2 \\ &= 2\pi^2 R r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sup} &= 2\pi y_G \cdot \text{lunghezza curva} \\ &= 2\pi R \cdot 2\pi r \\ &= 4\pi^2 R r \end{aligned}$$

— o — o —

