

INTEGRALI CURVILINEI

Integrali di FUNZIONI lungo CURVE
INTEGRAZIONE NON ORIENTATA

- ① Notazioni
- ② Significato geometrico
- ③ Idea della definizione
- ④ Formule per il calcolo

① Notazioni

$$\int_{\gamma} f(x) ds$$

γ curva
 ds "elemento di lunghezza"
 $f(x)$ sta ad indicare che si tratta di int. curvilineo

dove

$$\rightarrow \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\rightarrow f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ dove } A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ che contiene almeno il supporto di } \gamma$$

② Significato geometrico

Possiamo considerare la funzione

$$[a, b] \ni t \rightarrow f(\gamma(t)) \in \mathbb{R} \quad \text{"quota dell'auto al tempo t"}$$

L'integrale curvilineo NON è l'integrale di questa funzione, ma è l'integrale della funzione

$$s \rightarrow f(s)$$

s distanza percorsa
 $f(s)$ altezza a cui si trova l'auto dopo aver percorso un tratto lungo s

[Discorsi GPS nel video]

③ Idea della definizione Consideriamo una partizione di $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$$

e costruiamo due somme del tipo

$$\sum_{k=1}^m \underbrace{\text{lunghezza}(t_{i-1}, t_i)}_{\text{lunghezza della curva tra } t_{i-1} \text{ e } t_i} \cdot M_i$$

$\uparrow$ costante t.c.
 $M_i \geq f(\gamma(t)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\sum_{k=1}^m \text{lunghezza}(t_{i-1}, t_i) \cdot m_i$$

$\uparrow m_i \leq f(\gamma(t)) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$

Se l'inf delle somme superiori è uguale al sup di quelle inferiori, quello è l'integrale curvilineo.

Oss. Nel caso particolare in cui $f(x) \equiv 1$, viene la lunghezza della curva.

④ Formula per il calcolo Se è tutto abbastanza regolare, diciamo $f \in C^0$ e $\gamma \in C^1$, allora

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|}_{ds} dt$$

In due variabili, con $\gamma(t) := (x(t), y(t))$ diventa

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

e analogo in 3 variabili

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ = \sqrt{\dot{x}(t)^2 dt^2 + \dot{y}(t)^2 dt^2}$$

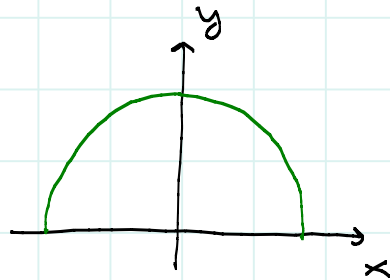
Baricentro di una curva In $\mathbb{R}^2$ è il punto $G = (x_G, y_G)$ con

$$x_G = \frac{1}{\text{lung}(s)} \int_{\gamma} x ds$$

$$y_G = \frac{1}{\text{lung}(s)} \int_{\gamma} y ds$$

Esempio Baricentro di una semicirc. di raggio r

Ovviamente $x_G = 0$ per simmetria



$$\int_{\gamma} y ds$$

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$= \int_0^{\pi} \underbrace{r \sin t}_y \cdot \underbrace{r}_{\|\dot{\gamma}(t)\|} dt = r^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = 2r^2$$

e quindi

$$y_G = \frac{1}{\underbrace{\pi r}_{\text{lung}}} \cdot 2r^2 = \frac{2}{\pi} r$$

più alto di quello della
semicirconferenza piena

$$\frac{2}{\pi} > \frac{1}{2} > \frac{4}{3\pi}$$

Osservazione Se cambio la parametrizzazione, ottengo lo stesso risultato.

Nell'esempio potevo usare $\gamma(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$ con $t \in [-r, r]$

Con questa parametrizzazione $\dot{x}(t) = 1$, $\dot{y}(t) = \frac{-t}{\sqrt{r^2 - t^2}}$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \left\{ 1 + \frac{t^2}{r^2 - t^2} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{r^2}{r^2 - t^2} \right\}^{1/2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - t^2}}$$

Allora

$$\int_{\gamma} y ds = \int_{-r}^r \underbrace{\sqrt{r^2 - t^2}}_y \cdot \underbrace{\frac{r}{\sqrt{r^2 - t^2}}}_{\|\dot{\gamma}(t)\|} dt = r \cdot 2r = 2r^2 \quad \odot$$

Integrazione NON orientata

→ L'integrale NON dipende dal verso di percorrenza e dalla parametrizzazione della curva

→ Eventuali tratti ripetuti contano secondo molteplicità.

Esempio di teorema

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1

$\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ di classe C^1 monotona e surgettiva

Allora possiamo considerare $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\psi(t)) \quad \forall t \in [c, d]$$

[γ_2 è una riparametrizz. di γ_1 mediante ψ]

Allora

$$\int_{\gamma_1} f(x) ds = \int_{\gamma_2} f(x) ds$$

$$\boxed{\text{Dim.:}} \quad \int_{\gamma_2} f(x, y) ds = \int_c^d f(x(\psi(t)), y(\psi(t))) \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt = \star$$

$$\|\dot{\gamma}_2(t)\| = \left\{ \dot{x}(\psi(t))^2 \dot{\psi}(t)^2 + \dot{y}(\psi(t))^2 \dot{\psi}(t)^2 \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \dot{x}(\psi(t))^2 + \dot{y}(\psi(t))^2 \right\}^{1/2} |\dot{\psi}(t)|$$

$$\star = \int_c^d f(x(\psi(t)), y(\psi(t))) \left\{ \dot{x}(\psi(t))^2 + \dot{y}(\psi(t))^2 \right\}^{1/2} |\dot{\psi}(t)| dt$$

Faccio il cambio variabili $z = \psi(t)$, da cui $dz = \dot{\psi}(t) dt$ e quindi

$$\int_a^b f(x(z), y(z)) \left\{ \dot{x}(z)^2 + \dot{y}(z)^2 \right\} dz = \int_{\gamma_1} f(x) ds$$

Questo se ψ è crescente. Se è decrescente devo mettere segno - ma invertire gli estremi.