

STIME PER INTEGRALI DI FUNZIONI VETTORIALI

Setting: $A \subseteq \mathbb{R}^m$ (con $m=1,2,3$) insieme limitato
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}^d$

Consideriamo

$$\int_A f(x) dx = \left(\int_A f_1(x) dx, \dots, \int_A f_d(x) dx \right)$$

↑
integrale semplice,
doppio, triplo

↑
vettore che ha come
componenti gli integrali
delle componenti di f

Teorema (Stima dall'alto per un integrale vettoriale)

Setting come sopra.

Allora

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \leq \int_A \|f(x)\| dx$$

Dim Si fa per DUALITÀ. Considero un qualunque vettore $v \in \mathbb{R}^d$
e osservo che

$$\begin{aligned} \langle v, \int_A f(x) dx \rangle &= \int_A \langle v, f(x) \rangle dx \\ &= \sum_{k=1}^d v_k \int_A f_k(x) dx = \int_A \left\{ \sum_{k=1}^d v_k f_k(x) \right\} dx \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{linearità dell'integrale} \end{aligned}$$

Ora metto i moduli, quelli di Analisi 1:

$$\left| \langle v, \int_A f(x) dx \rangle \right| = \left| \int_A \langle v, f(x) \rangle dx \right|$$

Analisi 1 $\rightarrow \leq \int_A |\langle v, f(x) \rangle| dx$

Cauchy-Schwarz $\rightarrow \leq \int_A \|v\| \cdot \|f(x)\| dx$
 $= \|v\| \int_A \|f(x)\| dx$

Ora ci sono due casi:

$\rightarrow$ se $\int_A f(x) dx = 0$, allora non c'è molto da dire.

$\rightarrow$ se $\neq 0$, allora posso $v := \int_A f(x) dx$, ed ho che

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\|^2 \leq \left\| \int_A f(x) dx \right\| \cdot \int_A \|f(x)\| dx$$

e ora semplificando ho la tesi.

— o — o —

Esercizio Il risultato vale anche con norme diverse dalla euclidea. Provare a dimostrarlo con un'altra.

— o — o —

Teorema (Stima dal basso per un integrale vettoriale)

Setting come sopra.

Allora per ogni $x_0 \in A$ vale la disuguaglianza

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \int_A \|f(x)\| dx - 2 \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

Dim Aggiungo e tolgo $f(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0))$$

→ Disug. triangolare ≤ e integro

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \|f(x) - f(x_0)\|$$

$$\int_A \|f(x)\| dx \leq \underbrace{\int_A \|f(x_0)\| dx}_{} + \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

$\|f(x_0)\| \cdot \text{meas}(A)$ (lunghezza, area o volume)

→ Integro e Disug. triang. ≥

$$\|v+w\| \geq \|v\| - \|w\|$$

$$\int_A f(x) dx = \int_A f(x_0) dx + \int_A (f(x) - f(x_0)) dx$$

$$\left\| \int_A f(x) dx \right\| \geq \underbrace{\left\| \int_A f(x_0) dx \right\|}_{} - \left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\|$$

$\|f(x_0)\| \cdot \text{meas}(A) \sim$ me lo procuro dallo step precedente

$$\begin{aligned} &\geq \int_A \|f(x)\| dx - \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx \\ &\quad - \left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\| \end{aligned}$$

$$\geq \int_A \|f(x)\| dx - 2 \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

ho usato la stima dall'alto

$$\left\| \int_A (f(x) - f(x_0)) dx \right\| \leq \int_A \|f(x) - f(x_0)\| dx$$

— o — o —

Dim che

$$\text{lunghe}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

se γ è di classe C^1 .

Devo dimostrare due cose

① Tutte le poligoni hanno $\text{lunghe} \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$

② $\forall \varepsilon > 0$ esiste una poligonale la cui lunghe è $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt - \varepsilon$

Dim ① Osserviamo che

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \quad \text{questi sono vettori}$$

$\uparrow$
è vera comp. per comp.

quindi per la stima dall'alto

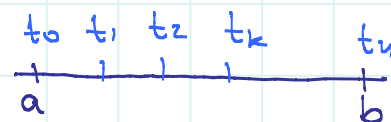
$$\text{lunghe. poligonale} = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

stima
dall'alto

$$= \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$



Dim ② Dato $\varepsilon > 0$ devo trovare la poligonale

Moralmente devo prendere i t_i molto "fitti".

Essendo $\dot{\gamma}(t)$ continua, sarà pure uniformemente continua, quindi...

... per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|\ddot{\gamma}(t) - \ddot{\gamma}(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{se} \quad |t-s| \leq \delta$$

Ora faccio le foto in tempi $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tali che

$$|t_i - t_{i-1}| \leq \delta \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n$$

Dico che la poligonale ottenuta va bene.

Infatti

$$\text{lunghezza (poligonale)} = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \ddot{\gamma}(t) dt \right\|$$

uso stima dal basso $\geq \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\ddot{\gamma}(t)\| dt - 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\ddot{\gamma}(t) - \ddot{\gamma}(t_i)\| dt \right\}$

↑
ho scelto $x_0 = t_i$,
ma qualunque
p.to in $[t_{i-1}, t_i]$
andava bene

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\ddot{\gamma}(t)\| dt}_{\int_a^b \|\ddot{\gamma}(t)\| dt} - 2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\ddot{\gamma}(t) - \ddot{\gamma}(t_i)\| dt$$

Quindi per concludere mi basta che l'altro termine sia $\leq \varepsilon$.

D'altra parte

$$2 \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\|\ddot{\gamma}(t) - \ddot{\gamma}(t_i)\|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ perchè } |t-t_i| \leq \delta} dt = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon dt$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}_{b-a}$$

$$= \varepsilon \quad \text{☺}$$