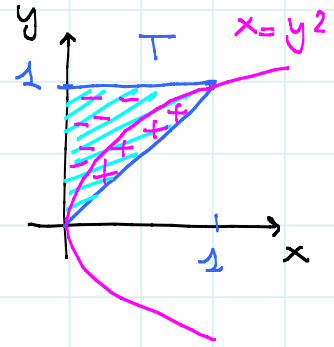


Esercizio 1 $\iint_T |x - y^2| dx dy$

Osserviamo che

$$|x - y^2| = \begin{cases} x - y^2 & \text{se } x \geq y^2 \rightsquigarrow T^+ \\ -x + y^2 & \text{se } x \leq y^2 \rightsquigarrow T^- \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \iint_T |x - y^2| dx dy &= \iint_{T^+} (x - y^2) dx dy + \iint_{T^-} (-x + y^2) dx dy \\ &= \iint_{T^+} (x - y^2) dx dy - \iint_{T^-} (x - y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} dy (x - y^2) - \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 dy (x - y^2) \\ &= \text{si fanno} \end{aligned}$$

Se non vi piacciono le radici, considero insieme normaliasse y

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 dx (x - y^2) - \int_0^1 dy \int_0^{y^2} dx (x - y^2) \\ &= \text{si fanno ancora meglio.} \\ &\quad _ \circ _ \circ _ \end{aligned}$$

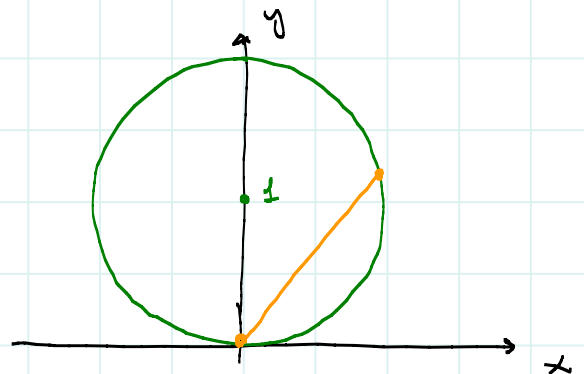
Esercizio 2 Descrizioni di insiemi "strani" in coord. polari

Cerchio con centro in $(0, 1)$ e raggio 1

$$x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

$$0 \leq \rho \leq \text{qualcosa che dipende da } \theta$$



$$x^2 + y^2 - 2y + 1 \leq 1, \text{ cioè } x^2 + y^2 - 2y \leq 0, \text{ cioè}$$

$$\rho^2 - 2\rho \sin \theta \leq 0 \quad (\text{uso che } \rho > 0)$$

$$\rho - 2 \sin \theta \leq 0$$

$$\rho \leq 2 \sin \theta$$

Quindi in coord. polari l'insieme diventa

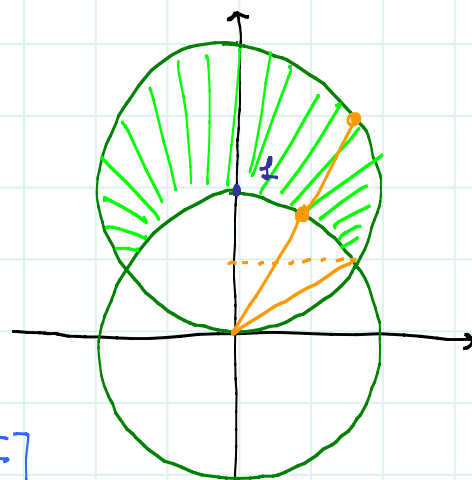
$$0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \rho \leq 2 \sin \theta$$

Descrivere la "lunetta" tra i due cerchi

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \quad 1 \leq \rho \leq 2 \sin \theta$$

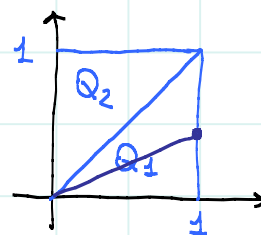
La seconda relazione suppone

$$2 \sin \theta \geq 1, \text{ cioè } \sin \theta \geq \frac{1}{2}, \text{ cioè } \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$



Descrivere un quadrato in coord. polari

$$Q_1: 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}$$



In alternativa sarebbe $x \leq 1$, cioè $\rho \cos \theta \leq 1$

$$Q_2: \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \theta}$$

$$y \leq 1 \leadsto \rho \sin \theta \leq 1 \leadsto \rho \leq \frac{1}{\sin \theta}$$

Esercizio classico Calcolare la distanza media dei p.ti di un quadrato da un vertice fissato.

Ci si riduce a calcolare

$$\iint_Q \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \sqrt{x^2 + y^2}$$

[Si fa con cambio di variabili $y = x \sin \theta$]

In alternativa si può fare in polari

$$\iint_Q \sqrt{x^2+y^2} dx dy = 2 \iint_{Q_1} \sqrt{x^2+y^2} dx dy$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \rho \cdot \rho$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{1}{\cos^3\theta}$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}$$

ora basta porre
 $t = \sin\theta$

= diventa razionale e si fa.
— o — o —

Esercizio 3 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 3 \leq xy \leq 7\}$

$$\text{Area}(A) = \iint_A 1 dx dy$$

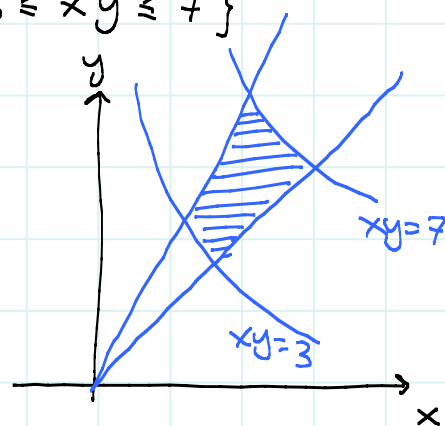
1° modo Cartesiano ...

2° modo Cambio di variabili standard

$$1 \leq \underbrace{\frac{y}{x}}_u \leq 2, \quad 3 \leq \underbrace{xy}_v \leq 7$$

Mi serve J e uso la procedura standard

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = u \\ xy = v \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = uv \\ x^2 = \frac{v}{u} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$



Calcolo la matrice $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{v}}{u\sqrt{u}} & \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} \end{pmatrix}$

Da cui $J = |\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u} \right| = \frac{1}{2u}$

Quindi $\text{Area}(A) = \int_1^2 du \int_3^7 dv \frac{1}{2u} = \text{si fa.}$

3° modo Cambio astuto

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = xy \end{cases} \quad \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$|\text{Det}| = \left| -\frac{y}{x} - \frac{y}{x} \right| = 2 \frac{y}{x} = \textcircled{2u} \leftarrow \text{reciproco del } J \text{ che serviva !!!}$$

Volendolo dire rigorosamente

$$\int_1^2 du \int_3^7 dv \frac{1}{2u} =$$

↑
applico il cambio di
variabili

$$u = \frac{y}{x}$$

$$v = xy$$

— o — o —

$$\iint_A dx dy \frac{1}{2u} \cdot 2u = \text{Area}(A)$$

↑
J calcolato
come abbiamo
appena fatto

Esercizio 4 (LA FOGNA)

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

Intersezione di due cilindri con assi perpendicolari

Calcolare il volume.

1° modo Per sezioni !!!

$$\text{Vol}(S) = \int_{-1}^1 dz \cdot \text{Area}(S_z)$$

è l'intersezione di
due strisce $\perp$

$$= 4 \int_{-1}^1 (1-z^2) dz \quad !!!$$

S_z è un quadrato di lato $2\sqrt{1-z^2}$

2° modo Si può fare anche per
colonne

"Il soffitto è dato, a seconda delle zone,
da $z = \sqrt{1-x^2}$ oppure $z = \sqrt{1-y^2}$ ".

Variante : aggiungere il terzo cilindro lungo asse z ☺

— o — o —

