

BARICENTRI

Per figure piane: Sia $F \subseteq \mathbb{R}^2$ una figura. Il baricentro di F è il pto G di coordinate (x_G, y_G) date da

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F x \, dx \, dy$$

↑
media della coordinata
x in F

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dx \, dy$$

Questo assumendo che F sia fatta di un materiale uniforme. Altrimenti, se la densità è una $f(x, y)$ variabile, allora

$$x_G = \frac{1}{\iint_F f(x, y) \, dx \, dy} \iint_F x \cdot f(x, y) \, dx \, dy = \text{media pesata delle coord. } x$$

Stessa cosa in 3 variabili con $\frac{1}{\text{Vol}}$ è $\iiint$ di x, y, z .

Esempio 1 Semicerchio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$

$$x_G = 0 \text{ (per simmetria)}$$

$$\text{Area} = \frac{\pi}{2} R^2$$

$$\iint y \, dx \, dy = \int_0^R dp \int_0^\pi d\theta \, p \sin \theta \cdot p = \int_0^R p^2 dp \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta}_2 = \frac{2}{3} R^3$$

da cui

$$y_G = \frac{1}{\frac{\pi}{2} R^2} \cdot \frac{2}{3} R^3 = \frac{4}{3\pi} R$$

↑ è ragionevole che
sia sotto $\frac{R}{2}$

↑ è ragionevole che
riscafi come R

Esempio 2 Semisfera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$

Per simmetria $x_G = y_G = 0$. Volume $= \frac{2}{3} \pi R^3$

$$\begin{aligned} \iiint z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \rho \sin \varphi \, \rho^2 \cos \varphi \\ &= \underbrace{\int_0^R \rho^3 \, d\rho}_{\frac{1}{4} R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}_{\left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} R^4 \end{aligned}$$

$$\leadsto z_G = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi R^3} \cdot \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{3}{8} R$$

Nota bene : $\frac{3}{8} \stackrel{?}{<} \frac{4}{3\pi} \Leftrightarrow 9\pi \stackrel{?}{<} 32$
27,1...

Il baricentro della semisfera è + basso di quello del semicerchio.
— o — o —

MOMENTO D'INERZIA di una figura / solido rispetto ad una retta

$$I_{F, l} = \frac{1}{\text{Area / Vol}} \iint_F \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eventuale densità}}}{\text{dist}((x, y), l)^2} \, dx \, dy \quad (\text{e analogo in 3 variabili})$$

Esempio 3 Sfera rispetto a retta che passa per il centro

Posso fare finta (per simmetria) che la retta sia l'asse z .

$$\iiint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \frac{2}{3} \iiint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = \frac{8\pi}{15} R^5$$

La distanza di un p.to dall'asse z è ρ
delle coord. cilindriche $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

quando divido
per il volume
resta $\frac{2}{5} R^2$

Esempio 4 Se la retta è a distanza d dall'origine

Posso fare finta che sia la retta verticale passante per $(d, 0, 0)$

Ora devo fare

$$\iint_S \{(x-d)^2 + y^2\} dx dy dz = \iint_S \underbrace{(x^2 + y^2)}_{\substack{\uparrow \\ \text{come prima}}} - \underbrace{2xd}_{\substack{\uparrow \\ 0}} + \underbrace{d^2}_{\substack{\uparrow \\ d^2 \cdot \text{Vol}(S)}} dS$$

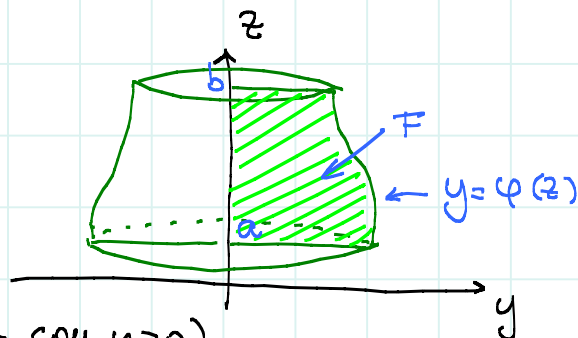
— o — o —

SOLIDI DI ROTAZIONE

Setting: è data una figura piana

$F \subseteq$ piano yz (anzi nella zona con $y \geq 0$)

Ruotiamo F intorno all'asse z (di 360° o anche di un angolo $\alpha \neq 360^\circ$)



Caso speciale: F è il sottografico di una funzione $y = \varphi(z)$

$$F = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [a, b], 0 \leq y \leq \varphi(z)\}$$

Come si descrive il solido S ottenuto dalla rotazione?

$$S = \{(p \cos \theta, p \sin \theta, z) : \theta \in [0, 2\pi], (p, z) \in F\}$$

Nel caso speciale diventa

$$S = \{(p \cos \theta, p \sin \theta, z) : \theta \in [0, 2\pi], z \in [a, b], 0 \leq p \leq \varphi(z)\}$$

Sempre nel caso speciale, la sup. laterale del solido ha eq.

$$p = \varphi(z), \quad \text{cioè}$$

$$x^2 + y^2 = \varphi(z)^2$$

Volume di un solido di rotazione

$$\text{Vol}(S) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz$$

Dim Usiamo le coord. cilindriche

$$\begin{aligned} \text{Vol}(S) &= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{(p,z) \in F} p \, dp \, dz \quad \begin{matrix} \uparrow \\ J \end{matrix} \\ &= 2\pi \iint_{(p,z) \in F} p \, dp \, dz = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz \end{aligned}$$

Nel caso speciale

$$\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 \, dz$$

$$2\pi \iint_F y \, dy \, dz = 2\pi \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} dy \, y = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 \, dz$$

Oss. Nel caso speciale, potremo ragionare per sezioni:

$$\text{Vol}(S) = \int_a^b dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy = \int_a^b \text{Area}(S_z) \, dz = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 \, dz$$

$\uparrow$ Disco di
raggio $\varphi(z)$

— o — o —

Tornando al caso generale, osserviamo che

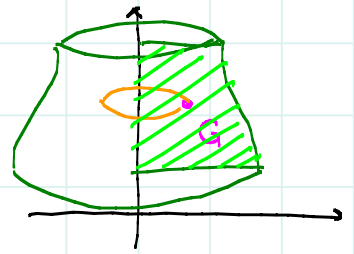
$$\text{Vol}(S) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz = \text{Area}(F) \cdot 2\pi \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dy \, dz$$

y_G

$$= \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

TEOREMA (GULDINO 1)

Vol. solido rotazione = Area Figura che ruota
· lungh. del cammino
percorso dal baricentro della
figura durante la rotazione



— o — o —